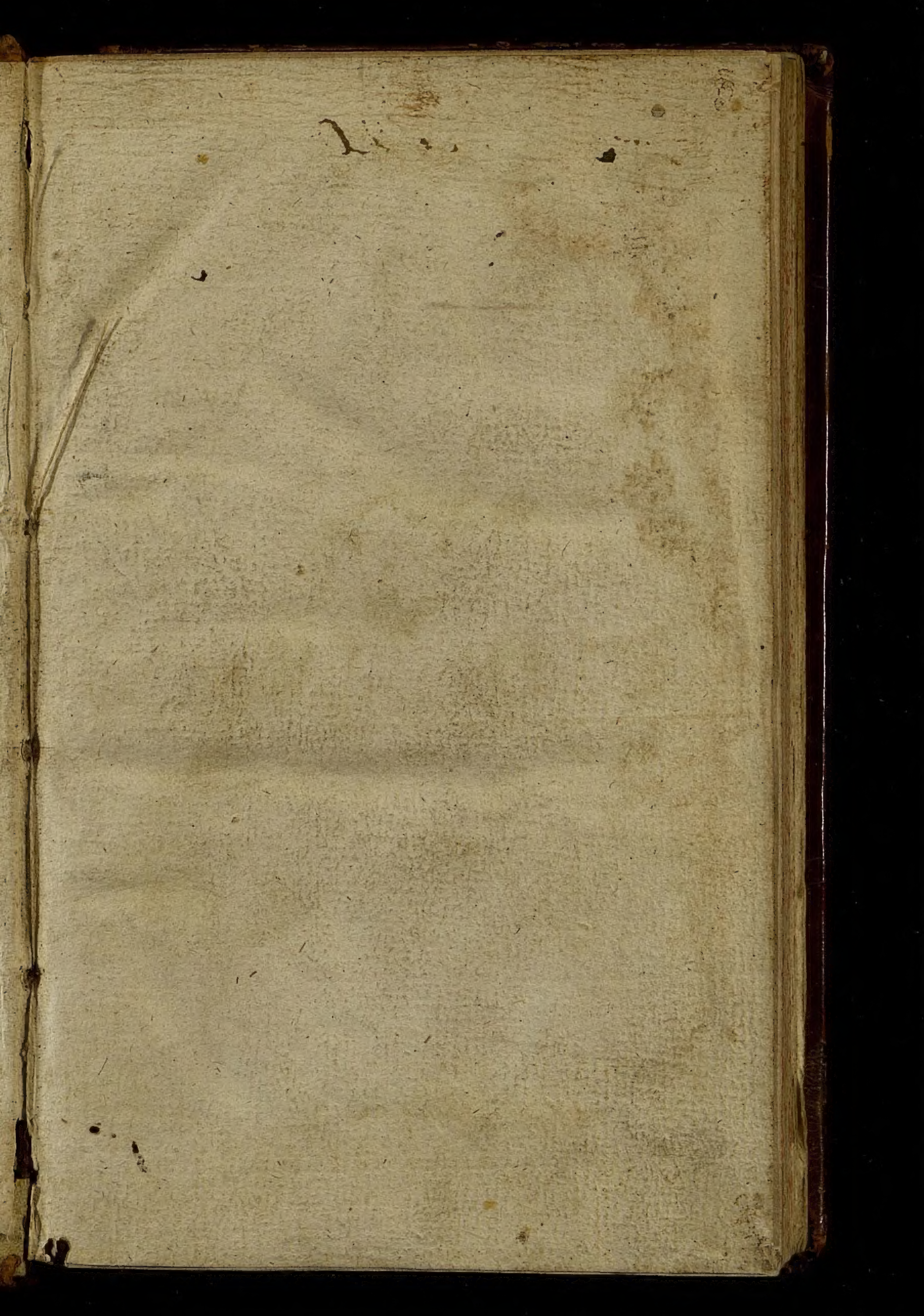
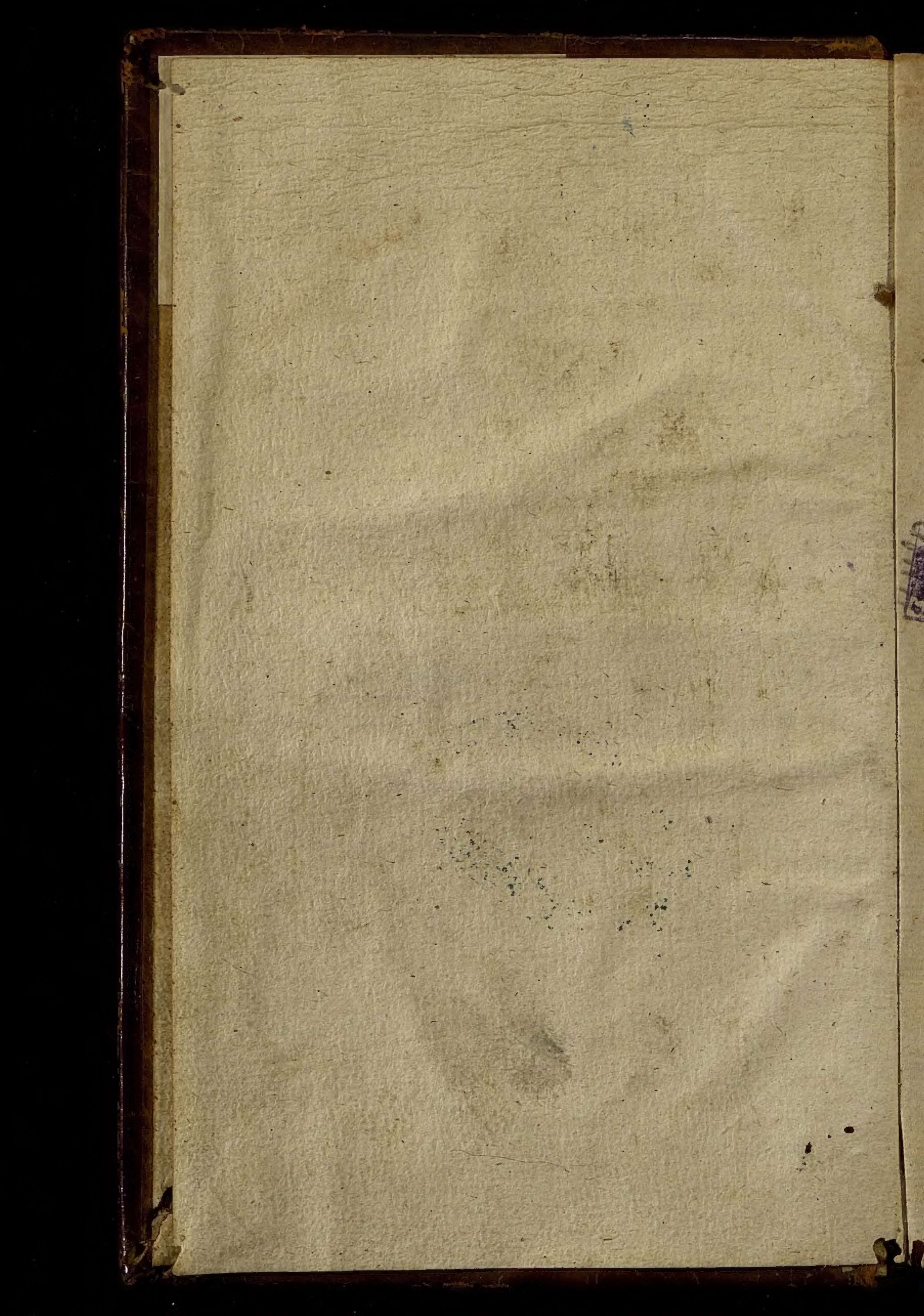



КАТАЛОГУ. 503.
КОНСТАНТИНОВ. МЕЖ. ИНСТИТУТА.
№ ШКАФ. IV
№ ПОЛК.





ГЕНЕРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

или

Общее измѣреніе протяженія составляющее Теорію и Практику оной науки.

КНИГА ПЕРВАЯ

содержащая въ себѣ елементы геометріи, плоской тригонометріи и сферики.

Сочиненная для учащагося въ морскомъ шляхетномъ кадетскомъ корпусѣ благороднаго юношества, капитанскаго ранга математическихъ и навигацкихъ наукъ учителемъ Николаемъ Кургановымъ.



ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ

Печатано въ типографіи тогожъ Корпуса 1765 года.

БЛАГОРОДНОМУ

Морскаго шляхетнаго кадетскаго Корпуса

ЮНОШЕСТВУ

приношенiе

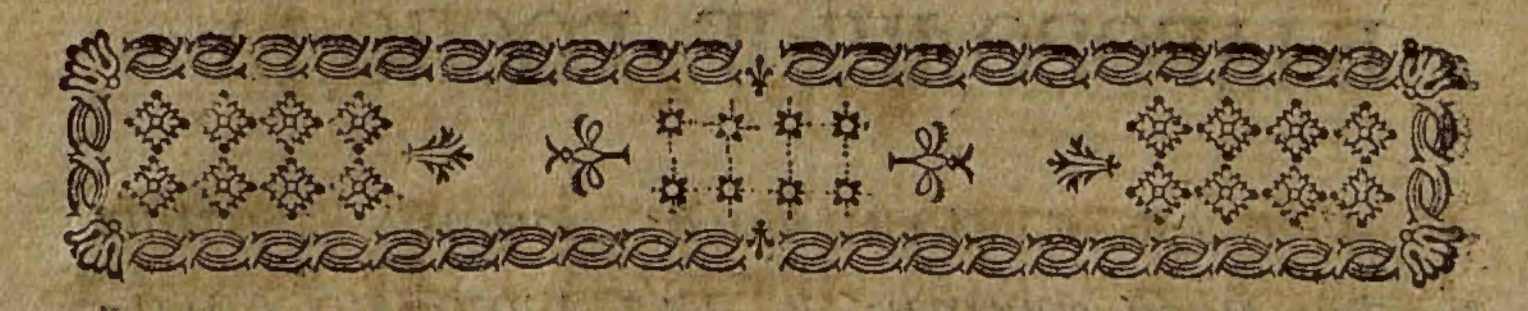
БЛАГОРОДНЫЕ ГОСПОДА

Учился я для васъ, нынѣ щастіе имѣю васъ учить; и для того по справедливости плодъ ученія моего вамъ приношу. Посвятивъ жизнь вашу найопаснѣйшей стихіи, вооружите себя противу ея знаніемъ Геометріи. Будучи главнѣйшая путеводителница къ мореплаванію и къ другимъ оное подкрѣпляющимъ наукамъ, сія покажетъ вамъ свободный и безопасный путь въ пространнѣйшія моря, сія научитъ васъ презирать и развервающуюся до преисподнихъ безднъ пучину, и востающія до небесъ волны океана, сія сдѣлаетъ васъ вѣтровъ и бурь повелителями. Помощію ея откроете вы несвѣдомыя пути въ непроходныхъ моряхъ, и покажете свѣту неизвѣстныя изобрѣтенія. Сего отъ васъ воспитующая и награждающая васъ всемилостивѣйшая Монархиня, сего отечество, сего радѣтелный и пользы вашей ищущій начальникъ вашъ ожидаютъ.

БЛАГОРОДНЫЕ ГОСПОДА

ВАШЪ ПОКОРНЫЙ СЛУГА

Николай Кургановъ



ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ.

Въ напечатанной 1757 года Арифметикѣ между множествомъ различной арифметической матеріи показаны удобнѣйшимъ образомъ свойства пропорціи, прогрессіи и логарифмовъ, кои какъ оной геометріи такъ и всей математики главнѣйшимъ основаніемъ служатъ. Геометрическія вычисленія случающіяся въ общежитіи, положены тамъ безъ доказательства для читателей коимъ оное ненужно, а любопытнымъ здѣсь обьясняются.

Столько уже есть и на нашемъ языкѣ различныхъ сочиненій о геометріи, что иное издавать кажется излишнымъ дѣломъ; но въ рассужденіи ихъ содержанія уповаю не безполезнымъ будетъ сіе новое сочиненіе, въ коемъ я подражалъ новѣйшимъ изданіямъ убѣгая многословныхъ и только умъ затрудняющихъ изъясненіи, старался въ лучшемъ порядкѣ предложить всѣ то кратко, точно и ясно, что не только къ познанію мореплавательной науки, но и всехъ о измѣреніи рассуждающихъ довольнымъ руководствомъ служитъ.

Хотя въ помянутой арифметикѣ и сказано въ кратцѣ о математикѣ, но здѣсь объ ней обстоятельнѣе повторить имѣю. Слово математика на греческомъ значитъ просто ученіе; однако она первейшею наукою можетъ назватся, по тому что ея начала знаемы безъ опыту и предложенія въ ней доказаны съ такою ясностью, что нѣтъ причины о чемъ сомнѣватся. Въ старину ея учили дѣтей предъ философіею, и для того Аристотель ону о назвалъ дѣтскою наукою, а сіе было не только для изощренія юношескаго разума приятнѣйшимъ ученіемъ, но чтобъ его приуготовить къ лучшему

понятію

понятію естественныхъ наукъ: и премудрый Платонъ никого не принималъ въ свое училище, кто не зналъ геометріи.

Наука есть *знаніе* преобретаемое чрезъ ясныя и основательныя начала. А понеже основанія математики суть весьма явновидны, слѣдственно математика есть истинная наука.

Математика есть такая наука, коя учитъ всему тому, какъ счислять и мѣрить. Что можно считать суть числа, и то называется арифметика, что можно мѣрить суть длина, ширина, тихость и скорость движенія, сила, теченіе, прибываніе и убываніе величинъ, и сіе обыкновенно имянуется геометрія.

Свойственныя части простой или чистой математики суть Арифметика и Геометрія, кои взаимно себѣ спомоществуютъ, и ни мало не зависятъ отъ прочихъ наукъ, кромѣ что отъ художественной логики: но уповаю что для обученія математики довольно одного природнаго смысла умному человѣку. Прочіяже науки Математики состоятъ только въ физическихъ или естественныхъ знаніяхъ чрезъ Арифметическія или чрезъ Геометрическія начала изътолкованныхъ.

Артифиціальная или снисканная Логика есть искуство показующее порядокъ, какъ исправно о вещахъ умствовать. Натуральная или врожденная есть то дѣйствіе добраго смысла, кое натурально учитъ различать истинну съ неправдою. Но какъ Математика есть весма естественная наука, то симъ рѣченное подтвердить можно, что для разумѣнія оной, довольно естественной Логики умному человѣку.

Чрезъ слово чистая Математика разумѣется та, коя рассуждаетъ о количествѣ просто само по себѣ, не касаясь до матеріи или до какой либо чувствительной вещи.

※)o(※

Геометрїя есть слово греческое значитъ землемѣрїе потому, что начальное сея науки употребленїе было во измѣренїи различныхъ земныхъ мѣстъ. Египтяне первыя ея изобрѣли для исправленїя межей своихъ дачь, ежегоднымъ на воднєнїемъ отъ рѣки Нила повреждаемыхъ. Но понеже сїя наука подаетъ правила, какъ чрезъ одну или многїя данныя, то есть, мѣрою знаемыя величины, можно находить другїя искомыя или мѣрою не знаемыя, а даннымъ подобныя величины, то чрезъ сїе она гораздо далѣе землемѣрїя простирается и составляетъ *теорїю* и *практику*.

Теорїя Геометрїи предлагаетъ естественныя свойства протяженїя и способы для точнаго измѣренїя всякихъ фигуръ; а практика показуетъ правила, какъ то ученїе на самомъ дѣлѣ употреблять, какъ то въ землемѣрїи и въ прочихъ житейскихъ случайностяхъ.

Теорїя Геометрїи не рассуждаетъ о естественныхъ тѣлахъ, кои различнымъ подлежатъ перемѣнамъ, но только о мнимыхъ, представляя себѣ одно бытїе ихъ длины безъ ширины, пространство безъ толщины или глубины, и не упоминая ни о какой матерїи. На примѣръ хотя совершеннаго шара и не видимъ, но по сей наукѣ должно его воображать такой круглой фигуры, коей всякая точка поверхности отъ средней или центра въ равномъ разстоянїи находится, дабы чрезъ то можно изслѣдовать непремѣнныя геометрическїя истинны, какъ поверхность шара есть точно въ четверо больше площади своего большаго круга, и прочїя сей подобныя, кои къ точному измѣренїю всѣхъ сущихъ въ свѣтѣ вещей служатъ. Ибо все, что принадлежитъ мнимому протяженїю, тожъ при всякомъ видимомъ употребляется: свѣтила въ небѣ, корабли на морѣ суть тѣла, небо, море суть пространства или протяженїя, ихъ теченїя

или,

їли движенїя скорости, пути и взаимныя положенїя размѣряются углами и линѣями; слѣдственно дѣйствїя Астрономїи и навигацїи основаны на правилахъ Геометрїи: однимъ словомъ Геометрїя есть основанїе всѣхъ наукъ о измѣренїи какой либо вѣщи предлагающихъ.

Теорическая Геометрїя имѣетъ свои Елементы, то есть первыя основанїя, состоящїя въ собранїи многихъ умствительныхъ и дѣятельныхъ предложенїй, одни изъ другихъ произведенныхъ, и чрезъ простыя истинны доказанныхъ.

Методъ или *порядокъ* есть искуство надлежащаго расположенїя многихъ винословїй, какъ для испытанїя незнаемой истинны предложенїя, такъ и для сообщенїя по изобрѣтенїи ея другимъ. Строгость метода геометрическаго или обще математическаго состоитъ въ томъ, чтобъ отнюдь ни чего не дознаемаго и не явно доказаннаго не утверждать. По сему для полученїя того совершенства, сперва показаны здѣсь первѣйшїя начала, по томъ оснавательныя положенїя (Гипотезисы), а изъ нихъ выведены опредѣленїя (дефиницїи) то есть, истолкованїя словъ, и вещей геометрическихъ: на примѣръ, что есть *кругъ*, *радїусъ*, *хорда* и проч. За сими началами слѣдуютъ предложенїя имѣющїя сходство съ простыми истиннами (Аксїомами), кои чрезъ себя всякому ясно понятны: на примѣръ какъ цѣлое своей части больше и суммѣ всѣхъ своихъ частей равно. Предложенїя истолкованы винословїемъ, кое доводъ или доказательство имянуется. Изъ сихъ изобрѣтенныхъ истиннъ происходятъ слѣдствїя (Королларїи) или такїя правды, кои изъ прежнихъ естественно текутъ и безъ объясненїя понятны: напримѣръ ежели равнобедренной прямолинѣйной треугольникъ имѣетъ два равныя угла, слѣд. равносторонней треугольникъ есть равноугольной.

Предложенія бываютъ двоякаго роду, одни навываемыя Теоремы состоятъ въ испытаніи свойствъ фигуръ: напримѣръ потребно изъяснить, что въ прямолинѣйномъ треугольникѣ сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ: здѣсь оныя теоремы просто предложеніями названы. другія суть *проблемы* или *задачи*, то есть, средства дѣйствительнаго употребленія чрезъ теоремы доказанныхъ истиннъ: напримѣръ данной величины прямую черту на сколько нибудь равныхъ частей раздѣлить и проч. для доводу какого либо предложенія или къ тому пріуготовленія употребляются конструкціи и леммы.

Конструкція или *сочиненіе* есть распоряженіе частей фигуры согласное съ теоремою или съ проблемою, то есть, рѣшительной способъ всякаго предложенія.

Лемма есть предложеніе какой либо доказанной истинны, коя служитъ пріуготовленіемъ для облегченія доказательства многотрудной теоремы.

Схоліонъ ставится вмѣсто примѣчанія на нѣкоторыя вещи, иногда особымъ доводомъ, а иногда общимъ изъятіемъ пространно доказанной теоремы; но здѣсь оное просто примѣчаніемъ названо.

Проблема бываетъ условная и неусловная, опредѣленная и неопредѣленная.

Условная проблема имѣетъ только одно рѣшеніе или рѣшится однимъ видомъ, какъ чрезъ три данныя точки, кои суть не на одной прямой чертѣ, кругъ описать.

Неусловная проблема есть та, коя имѣетъ безконечное рѣшеніе, то есть, кою можно рѣшить безчисленно разными видами: какъ чрезъ двѣ данныя точки кругъ провесть, или данной прямолинѣйной треугольникъ пополамъ раздѣлить.

Опредѣленная проблема, коя имѣетъ одно

либо нѣкое опредѣленное число рѣшенiевъ, а неболѣе. какъ на данной прямой линѣе написать прямолинѣйной равносторонной треугольникъ; сiя объ одномъ рѣшенiи. Начертить равнобедренной прямолинѣйной треугольникъ, коего площадь и обводъ даны; оная о двухъ рѣшенiяхъ. Прямолинѣйной данной уголъ на три равныя части раздѣлить; сiя проблема о трехъ рѣшенiяхъ и тако о прочихъ.

Неопредѣленная проблема есть та, коя получаетъ несмѣтное число разныхъ рѣшенiй.

Рѣшенiе проблемы можетъ быть геометрическое, механическое, и невозможное. Геометрическое рѣшенiе есть то, кое дѣлается чрезъ начертанiе линѣй приличныхъ состоянiю проблемы. Механическое рѣшенiе называется то, кое чинится отвѣдыванiемъ, или посредствомъ не геометрической линѣи, какъ сысканiе по чертежу двухъ среднихъ пропорцiональныхъ между данныхъ двухъ линѣй.

Рѣшенiе проблемы невозможное именуется то, кое точно никоимъ образомъ учинить нельзя: какъ здѣлать квадратъ равной данному кругу, что математики обыкновенно квадратурою круга называютъ: или въ Арифметикѣ изъ какого нибудь неквадратнаго числа, какъ изъ трехъ, пяти, семи, и проч. точно квадратной либо кубической радiксъ извлечь.

Въ прочемъ ежели кто читая доказательства не въ состоянiи будетъ на изъясненiе по знанiю прежнихъ истиннъ самъ попасть, то оное ему на прешедшiя номеры или числа, въ скобкахъ означенныя ссылки на память приводить могутъ.

Изъ сего краткаго описанiя порядка геометрическаго и обще математическаго явствуетъ, что онъ прiучаетъ разумъ къ твердымъ и основательнымъ разсужденiямъ, и прiобыкшей упражняясь въ ономъ ученiи мысли свои такъ располагать, разсуждая и о другихъ вещахъ такомуже порядку последуетъ. Ибо онъ показуетъ способъ точнаго

испытанiя

испытанія достовѣрной истинны, и служитъ примѣромъ, какъ въ обученіи другихъ наукъ, начиная отъ врожденнаго понятія доходитъ до высокаго знанія, или какимъ средствомъ основательному разсужденію во всемъ послѣдовать.

* *

У Платона въ VII книгѣ его республики о пользѣ Геометріи.

И такъ видишь любезный другъ, что математическія науки необходимы по тому, что они чрезъ ясно предлагаемую въ себѣ точность обязуютъ силы нашего разума употреблять. по истиннѣ есть такое ихъ упражненіе, къ томуже сіе достойно вниманія, когда всякъ человѣкъ врожденно способенъ умствовать и разумѣть всѣ знанія, то имѣющія хотя посредственное понятіе, ежели поучатся сей наукѣ, и когда имъ для всякаго инаго дѣла будетъ безполезна, тогда могутъ отъ нея пользоватся тѣмъ, что о всякой вещи основательнѣе разсуждать станутъ. ибо нѣтъ инаго ученія, кое бы умъ дѣлало столь просвѣщеннымъ. Сея то наукѣ должно обучать тѣхъ, въ комъ усмотрится разумъ достойный украшенія ученіемъ.

У плютар-

платонъ былъ Афинейскій философъ, жилъ въ концѣ персицкой монархіи, около 400 лѣтъ прежде рожд. хр. мужъ изо всѣй Греціи найученнѣйшій. умеръ на 85 году своей жизни. цицеронъ столь высоко его почитая говаривалъ, что онъ лучше съ платономъ хочетъ погрѣшать, нежели съ инымъ правду говорить.

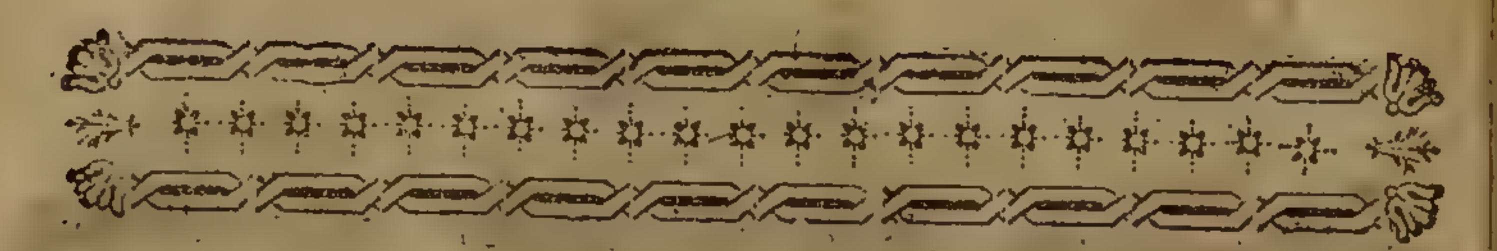
у Плютарха въ осмой книгѣ вопросовъ.

Платонъ хвалитъ геометрїю, для того что она отводитъ чувства, кои совсемъ нами властвуютъ, и приводитъ насъ къ тому, что есть только умственно и вѣчно. Знанїе сего есть совершенство философїи, какъ открытїе тайностей есть предѣлъ ихъ испытанїю. Радость и печаль столь тѣсно соединяютъ умъ съ чувствами или душу съ тѣломъ, что она сдѣлавшись отъ него зависящею, о извѣстныхъ ей вещахъ не по здравому разуменїю, но по получаемому отъ своего тѣла воображенїю рассуждаетъ. Сила сихъ страстей дѣлаетъ душу чувствительну только къ различнымъ и всегдашнимъ перемѣнамъ тѣлесныхъ вещей ей представляемыхъ. Она будучи сама собою въ состоянїи намъ открыть божественное существо, но ослѣпляясь чувствами, несравненно превосходнѣе тѣлесныхъ глазъ свѣтъ теряетъ, и высочайшаго любомудрїя лишается. Геометрїя такому подобна чистому зеркалу, въ коемъ видны слѣды и изображенїя вещей умственныхъ, къ которымъ она нашъ разумъ, яко бы очистя, или освободя отъ ига чувствъ обращаетъ.

ОГЛАВ-

Плютархъ греческой философъ жилъ въ первомъ столѣтїи послѣ рожд. хр. во время Трояна Кесаря римскаго.





ОГЛАВЛЕНІЕ

* *

ЕЛЕМЕНТОВЪ ГЕОМЕТРІИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О лонгиметріи.

О геометріи вообще стр. 1

О происхожденіи и главныхъ свойствахъ линѣи. 4
О свойствахъ прямыхъ линѣй въ положеніи одной въ разсужденіи другой. 6
О свойствахъ прямыхъ линѣй въ положеніи одной противъ двухъ или многихъ, иныхъ линѣй пространство не опредѣляющихъ. 14
О нѣкоторыхъ свойствахъ прямыхъ линѣй съ кругомъ. 24
О прямыхъ линѣяхъ пространство заключающихъ. 36
О разныхъ видахъ и свойствахъ треугольниковъ. 37
О сношеніи треугольниковъ. 44
О прочихъ полигонахъ. 49
О свойствахъ полигоновъ вообще. 50
О симетрическихъ полигонахъ со впадшими и вышедшими углами. 54
О свойствахъ правильныхъ полигоновъ. 56
О свойствахъ круга. 62
О содержаніяхъ и равномѣріяхъ геометрическихъ. 66
О нѣкоторой равномѣрности линѣй. 73

О про-

о пропорціональныхъ линѣяхъ. 76
о сравненіи подобныхъ фигуръ. 100
объ окружіяхъ или обьодахъ фигуръ и о сравненіи оныхъ. 104

* *

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О планиметріи.

о мѣрахъ удобныхъ къ измѣренію величины поверхностей. 107
о генеральномъ способѣ измѣренія площадей. за симъ слѣдуетъ превращеніе, сложеніе, вычитаніе, увеличиваніе и уменьшеніе площадей. 108
примѣчанія на квадратуру круга. 132
о дѣленіи плоскихъ поверхностей. 134
пополненіе планиметріи. 154
о свойствахъ плоскостей. 156

* *

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ

О стереометріи. 162

о натурѣ и свойствахъ тѣлъ прямолинѣйнымъ движеніемъ произведенныхъ. 164
о натурѣ и свойствахъ тѣлъ круговымъ движеніемъ произведенныхъ. 168
о поліедрахъ или многогранныхъ тѣлахъ и основаніи оныхъ. 171
о составленіи тѣлъ изъ бумаги. 173
о изображеніи тѣлъ на плоскости. 174
о сравненіи тѣлъ. тамже

о измѣ-

О измѣренїи высотъ всякихъ тѣлъ. 178
о измѣренїи поверхности тѣлъ. тутже
о сравненїи поверхностей на тѣлахъ. 186
о измѣренїи толстоты всякаго рода тѣлъ. 188
о измѣренїи толстоты пяти правильныхъ тѣлъ. 196
о сравненїи тѣлъ по ихъ толстотамъ; тутъ показано во обще превращенїе, сложенїе, вычитанїе, увеличиванїе, уменьшенїе и дѣленїе тѣлъ и проч. 205

* *

ЕЛЕМЕНТЫ

Плоской или прямолинѣйной тригонометрїи.

Дефиницїи и начальныя основанїя. 210
Основанїя для сочиненїя таблицъ синусовъ. 215
о вычислѣнїи логарифмовъ синусовъ, тангенсовъ и проч. 218
о употребленїи логарифмовъ синусовъ тангенсовъ и проч. 220
общїя предложенїя о тригонометрическихъ выкладкахъ. 224
Правила вычисленїя прямоугольныхъ треугольниковъ. 227
Правила вычисленїя косоугольныхъ треугольниковъ. 234
о рѣшенїи разныхъ тригонометрическихъ задачь. 237
Описанїе о секторѣ и проч. 249

ЕЛЕМЕНТЫ

❧)o(❧

* *

ЕЛЕМЕНТЫ СФЕРИКИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Дефиницїи и начальныя основанїя сферической науки. 253

* *

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О проекцїи сферы.

Дифиницїи и первыя основанїя сферической проекцїи. 261
О свойствахъ стереографической проекцїи. 264

* *

ЧАСТЬ ТРЕТЇЯ

О сферической Геометрїи, а въ ней показаны проблемы сферической проекцїи. 278

* *

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

О сферической тригонометрїи.

Дефиницїи и первыя основанїя. 294
О главныхъ свойствахъ сферическихъ треугольниковъ. 296

О сношенїи

О сношенїи прямоугольныхъ треугольниковъ въ разсужденїи величины ихъ сторонъ, и угловъ. 302
Правила вычисленїя прямоугольныхъ треугольниковъ. 305
Пропорцїи для вычисленїя сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ. 310
Изъясненїе предписанныхъ пропорцїй. 313
О рѣшенїи сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ генеральнымъ правиломъ. 316
Доказательство на сїе правило. 317
Начала для вычисленїя косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ. 320
Общее рѣшенїе косоугольн. сферич. треугольниковъ по всѣмъ возможнымъ заданїямъ. 330
Пропорцїи для вычисленїя сферическихъ косоугольныхъ треугольниковъ. 333

* *

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

О начертанїи и числительномъ рѣшенїи сферическихъ треугольниковъ.

Примѣры на прямоугольн. треугольники. 337
Примѣры на косоугольныя треугольники. 345
Заключенїе. 359
О измѣренїи площади на поверхности шара дугами какихъ нибудь круговъ опредѣленной. 361

КОНЕЦЪ ОГЛАВЛЕНІЮ.

ЕЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРІИ

* * * * * * * * * * * * * * * *

О ГЕОМЕТРІИ ВООБЩЕ

И

О РАЗЛИЧІИ ПРОТЯЖЕНІЯ

Геометрія есть наука, коя изъясняетъ свойства протяженныхъ величинъ или протяженія и оное точно измѣрять учитъ.

2. Хотя всякое сущее въ свѣтѣ протяженіе имѣетъ всегда при себѣ три измѣренія, то есть, длину, ширину, толстоту или глубину, однако можно о каждомъ разсуждать особенно не касаясь до протчихъ, или о двухъ вкупѣ изключая третіе измѣреніе: такъ какъ думать о длинѣ дороги не разсуждая о ея ширинѣ; мыслить о пространствѣ поля не думая о земной толстотѣ.

3. Измѣреніе рассуждаемое токмо едину

называется

называется линѣя или черта; два вкупѣ дѣлаютъ величину двоякаго измѣренїя или поверхность, а три вмѣстѣ составляютъ тѣло. Того ради Геометрїю раздѣляютъ въ три части, изъ коихъ первая показываетъ свойства линѣй, и потому называется Лонгиметрїя. Вторая упражняется во изслѣдованїи плановъ или поверхностей, Планиметрїя. Третїя разсуждающая о тѣлахъ и какъ ихъ измѣрять имянуется Стереометрїя.

4. Для изображенїя всякаго протяженїя Геометры полагаютъ пунктъ или точку за величину безконечно малую; то есть лишенную всякаго измѣренїя; какъ самой конецъ остраго цыркуля или булавки.

5. Геометрїя всякое естественное тѣло разсматриваетъ токмо по величинѣ его протяженїя; то для наблюденїя во измѣренїи оныхъ тѣлъ надлежащей точности должно по сей наукѣ представлять въ умѣ одно ихъ протяженїе безъ вещества, но отвсюды въ точныхъ своихъ предѣлахъ заключенное: и по сему зоображенїю такое пустое пространство, какъ въ фигурѣ или начертанiи 1, геометрическимъ тѣломъ называется, котораго шесть наружныхъ граней или сторонъ разсуждаемыхъ безъ толщины составляютъ его поверхность; а тѣло есть протяженїе сею поверхностью опредѣленное. И тако предѣлы тѣла суть поверхно-

поверхности, поверхность ограничивают линѣи, а у всякой линѣи при концахъ предѣлы суть точки. Слѣдовательно всякаго протяженія по геометрическому разумѣнію ни какъ назначить не можно. Но хотя ихъ на бумагѣ изображаемъ, и тогда самыя малѣйшія точки, и тончайшія линѣи кажутся поверхностьми; а въ разсужденіи матеріи ихъ изъявляющей какъ чернилъ, карандаша и протч. оныхъ тѣлами назвать можно: однако все то для точнаго измѣренія всякой натуральной величины, или нами видимыхъ вещей должно признавать за одни знаки того, что мы по ихъ существу въ нашемъ разумѣ представляемъ.



ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О ЛОНГИМЕТРІИ.

* *

О произхожденіи и главныхъ свойствахъ линѣй.

6. Линѣю можно мысленно произвесть движеніемъ точки. Ежели точка движится прямо или въ одну сторону (какъ по вытянутой недолгой ниткѣ) то ея слѣдъ есть прямая линѣя, какъ БС (фиг. 2). А непрямо идучи производитъ кривую линѣю, какъ CD и БCD.

7. Представь себѣ еще, что точка описываетъ линѣю безмѣрно малыми ступеньми. Но какъ каждую такову ступень можно признавать за прямую линѣю безконечно малую: то по сему мнѣнію, прямая линѣя есть рядъ несчетнаго числа прямыхъ линѣй безмѣрно малыхъ въ одной прямости лежащихъ; а кривая линѣя есть рядъ несчетнаго числа прямыхъже линѣй безконечно малыхъ, и въ разныхъ положеніяхъ между собою состоящихъ.

8. Слѣдовательно, въ разсужденіи безконечной малости каждой ступени, можно ихъ почитать за самыя точки, а линѣю признавать за непрерывной рядъ точекъ; и тако отсюду явствуетъ.

9.

9. Іе. Прямая линѣя есть неминуемо самая кратчайшая, какую между двухъ предѣловъ или точекъ провесть можно, и потому оная есть точная мѣра ихъ разстоянія.

10. Іїе. Всѣ прямыя линѣи имѣются одного виду, а кривыя быть могутъ безконечнаго числа разныхъ видовъ.

11. Шe. Положеніе прямой линѣи требуетъ только два предѣла или двѣ точки, ибо отъ одной точки С (ф. 3) можно провесть безконечность прямыхъ какъ СВ, СІ, СН, ипр. а буде дастся другой предѣлъ какъ В, тогда положеніе линѣи опредѣлится чрезъ точки С, В. Но положеніе кривой черты опредѣляется по многимъ точкамъ.

12. Означенную чернилами или карандашемъ линѣю называютъ явною, а изображенную концомъ циркуля бѣлою. Точками или пунктирнымъ перомъ проведенная черта имянуется пунктирною или точечною.

13. Опредѣленнаго положенія или объявленной длины линѣя, опредѣленною или данною; а не имѣющая предѣловъ назначенная линѣя имянуется не опредѣленной длины, но токмо даннаго положенія.

14. Чрезъ двѣ данныя точки проводится и назначенная продолжается помощїю циркуля или пера и совершенно прямой линѣйки.

15. Для повѣреніяже линѣйки надлежитъ провесть на бумагѣ подлѣ оной линѣю, потомъ приложа линѣйку тѣмже краемъ къ концамъ той черты

съ другой стороны назначить другую; тогда ихъ видѣ окажетъ вѣрность линѣйки, иначе прикладывая край линѣйки къ висячей съ гирькою ниткѣ.

16. Правило измѣренія какой нибудь опредѣленной линѣи состоитъ въ сравненіи какой нибудь употребляемой общей мѣры какъ сажени, фута и проч. съ длиною данной линѣи.

****

О свойствахъ прямыхъ линѣй по взаимному ихъ положенію.

17. Iе. Основательное положеніе. Всякую прямую линѣю можно провесть на планѣ или плоскости то есть на такой всюды ровной поверхности, (какъ на выровненной бумагѣ или на полир. стеклѣ) которой всѣ точки между собою находятся въ одной совершенной прямости. Геометрическое изображеніе плана показано будетъ во второй части.

18. IIе. Также возможно опредѣлить среднюю точку всякой данной прямой линѣи на плоскости лежащей; а какъ то геометрически здѣлать показано ниже (66).

19. Сіе предположа вообрази, что на недвижимую прямую AB на планѣ означенную (фиг. 3.) наложена другая (которую называй движимою AB) съ первой равная и обѣ одну линѣю дѣлаютъ, и что оная на

средней

средней точкѣ C (18) неподвижной черты вращается такъ, * что ея часть AC концомъ своимъ A означа на томъ планѣ слѣдъ ADB, ляжетъ точно на половину CB не подвижной, а другая часть CB оставя по себѣ слѣдъ BFA соединится съ другою половиною CA черты неподвижной AB; и по сему мнѣнію движимая опишетъ фигуру, которой части суть слѣдующаго названія.

20. Толков. I. Вся фигура движимою описанная называется кругъ. Кривая линѣя ADBEA оной опредѣляющая есть окружность круга. Точка C около которой описана окружность центръ имянуется.

21. II. Какія нибудь части окружности, какъ AM, AML, LBH и проч. называются дуги круга. Прямая AB раздѣляющая кругъ пополамъ переходя чрезъ его центръ имянуется діаметръ или поперешникъ круга; такіяже суть FK, GL, DE и протч.

22. III. Прямая CA, которая своимъ теченіемъ описываетъ кругъ около центра C имянуется радіусъ (лучь) или полдіаметръ круга; и посему все прямыя отъ центра до окружности проведенныя какъ

* какъ средняя черта движимой планки по кругу Астрелябіи.

 CF

CF, CG, DC и проч. радїусы называются.

23. Слѣдовательно всѣ радїусы и дїаметры одного или равныхъ круговъ между собою равныя; и потому кругъ есть плоская фигура такою кривою линѣею опредѣленная которой всѣ точки отъ внутренной точки, имянуемаго центра равно отстоятъ.

24. Окружность всякаго круга для удобнѣйшаго измѣренїя угловъ обыкновенно раздѣляется на 360 равныхъ частей, называемыя градусы; каждой градусъ еще дѣлится на 60 равныхъ же частей имянуемыя минуты, всякая минута на 60 секундъ, секунда на 60 терцїи и проч. Сїе число градусовъ избрано для способнаго его раздѣла на цѣло чрезъ многїя чотныя и нечотныя числа. Оныя части не такїя непремѣнныя величины какъ саженныя или футовыя мѣры, но величинѣ круга пропорцїональныя; то есть градусъ большаго круга есть больше градуса малаго круга; и оныя съ величиною круговъ равно прибавляются и умаляются. По сему основанїю здѣланы разныя угломѣрющїя инструменты, какъ то квадранты, астрелябїи, транспортиры и проч. кои безъ описанїя моего всякому самою ихъ вещїю знаемы быть могутъ.

25. Рассуждая потомъ о теченїи движимаго дїаметра, явствуетъ Iе. Что оный не пустясь въ движенїе, не имѣлъ съ неподвижнымъ никакой пересечки и наклонности; но всѣ его точки точно закрывали всехъ соотвѣтствующихъ того точекъ.

26. IIе. Движимая на точкѣ C, купно

совсеми,

со всеми своими точками имѣетъ вращенїе, и каждая оныхъ равное число ступеней дѣластъ.

27. Шс. И какъ скоро движимая пустится въ теченїе, тогда ея точки тѣмъ болѣ обоюду отходятъ отъ соотвѣтственныхъ точекъ неподвижной чѣмъ оныя далѣ отстоятъ отъ точки C, оставшейся общею обоимъ линѣямъ, кои во оной пресеклись и части ихъ между собою наклонными учинились. Напримѣръ когда движимая здѣлалась прямою FCK, тогда у ней общаго съ неподвижною только осталась точка C; точка F далѣ отошла отъ A, нежели вся-кая иная находящаяся точка между F и C какъ f отъ a. Тоже учинитъ точка K въ разсужденїи B. Притомъ линѣя FK пересекла недвижимую AB, въ одной точкѣ C, и части той, FC, CK здѣлались къ оной наклонными.

28. Прямая секущая или однимъ концомъ своимъ касающая другую сочиняетъ уголъ; какъ линѣи FC, AC дѣлаютъ FCA. Углы въ разсужденїи ихъ сторонъ бываютъ трехъ родовъ, прямолинѣйныя, криволинѣйныя и смѣшеннолинѣйныя.

29. Уголъ изъявляетъ величину наклоненія одной линѣи къ другой, кои пересеклись; по сему чемъ ширѣ оныя линѣи имѣютъ отверстіе тѣмъ тупяе дѣлаютъ уголъ. Притомъ явно, что мѣра наклоненія двухъ линѣй есть число равныхъ ступеней, кое каждая точка движимой учинила, удаляясь отъ соотвѣтствующей точки недвижимой черты. По сему буде точки F, f и проч. движимой FC, отошли отъ точекъ A, a и проч. по 10 градусовъ, тогда уголъ наклоненія линѣй FC, AC будетъ 10 град. А ежели точка A перешла до G двойное число ступеней, тогда уголъ ACG есть въ двое болѣ угла ACF; и отъ сюду слѣдуетъ,

30. Iе. Всякаго прямолинѣйнаго угла мѣра есть дуга каждаго круга центръ свой въ верху того угла имѣющая и между двухъ прямыхъ линѣй уголъ составляющихъ содержимая: и тако когда говоримъ уголъ 5 ти град. то сіе значитъ что его мѣра есть круга дуга въ 15 град. величиною.

31. IIе. Всѣ углы имѣющія за мѣру дуги одинакаго числа градусовъ, между собою равныя; и обратно, все дуги въ одномъ или въ равныхъ углахъ написанныя имѣя свой

центръ

центрѣ вверху угловъ, содержутъ одинакое число градусовъ.

32. IIIe. Знавъ величину угла, познается величина дуги его сторонами содержимая; и обратно.

33. По томъ внятно разсуждая о круговомъ теченіи движимой, ясно видимъ, что оная была въ различныхъ своихъ положеніяхъ и тѣмъ съ недвижимою разной величины углы составляла. Когда движимая AC была линѣею CD, гдѣ никакой не имѣла наклонности къ линѣямъ AC, CB, то есть стояла на нихъ совершенно прямо, тогда дѣлала углы ACD, DCB, прямыя; а будучи наклонна къ AC, чинила углы какъ ACF, ACG и проч. острыя. Склоняясь къ CB составляла углы какъ ACH, ACI и проч. тупыя. Острыя и тупыя углы называются косыя. Тоже самое тогда производила и движимая CB описующая полукружіе BEA.

34. Слѣдовательно, всякой острой уголъ меньше тупова. Острыя и тупыя углы бываютъ разной величины; но прямой уголъ въ своей мѣрѣ неизмѣняется. И по тому все прямыя углы между собою равныя, и каждой по 90̊; ибо мѣра двухъ прямыхъ есть полукружность, то есть 180̊. Остраго угла

мѣра

мѣра есть дуга, коя менѣ 90, а тупаго угла мѣра есть дуга которая болѣ 90.

35. Прямая дѣлающая съ другою прямой уголъ или на иной никуда ненаклонно стоящая называется къ оной перпендикулярная или перпендикуляръ (прямостоящая). По сему линѣя DC есть перпендикуляръ на AC, CB, и ко всей прямой AB; обратно, CA, CB, и вся AB также перпендикулярны суть къ CD.

36. Чрезъ данную точку прямой линѣи только одинъ перпендикуляръ пройти можетъ къ оной линѣѣ на одной плоскости. Понеже только одинъ есть палежъ, въ которомъ движимая къ частямъ CA, CB не бываетъ наклонною.

37. Цѣлая окружность круга только размѣряетъ 4 прямыя угла, понеже вся окружность состоитъ изъ четырежды по 90 = 360. По сему сумма всѣхъ угловъ при одной точкѣ C стоящихъ не превосходитъ 360.

38. Всякая прямая какъ HC стоя на другой AB, дѣлаетъ съ нею два угла ACH, HCB, коихъ сумма всегда = 180. Ибо дуги ADH, HB ихъ размѣряющія составляютъ

полу

полукружность. Слѣдовательно всѣ прямыя какъ FC, GC, HC и проч. стоящія въ одной точкѣ C на прямой AB, дѣлаютъ углы, коихъ сумма = 180.

39. *Уголъ Суплементъ* называется тотъ, которой съ другимъ дѣлаетъ 180 какъ уголъ HCA есть суплементъ угла HCB а оной угла ACH. *Уголъ комплементъ* имянуется тотъ которой съ другимъ дѣлаетъ 90 какъ уголъ ACF есть комлем: угла FCD; и обратно уголъ FCD есть компл. угла ACF.

40. Изъ четырехъ угловъ, отъ пресѣченія двухъ прямыхъ линѣй AB, HM составленныхъ противолежащія угла всегда равны между собою.

Доказ. Ибо часть AC движимой столькожъ ступеней перешла до H, сколько другая CB до M. По сему дуга AH = BM; того ради уголъ ACH = BCM. также и уголъ BCH = ACM.

41. Когда извѣстенъ одинъ изъ четырехъ угловъ отъ взаимнаго пресѣченія двухъ линѣй учиненныхъ, тогда и все прочія познаются.

42. Начертанныя углы мѣрить и данной

ной величины класть или чертить можно помощїю полукружнаго или четыреугольнаго Транспортира изъ кости либо изм҃ди здѣланнаго, коего край раздѣленъ на градусы и полградусы, а на большихъ и чрезъ четверти градуса. А для положенїя угловъ съ длинными сторонами въ центрѣ угломѣра воткни булавку съ привязанною нитью, и натеня положи ея на данное число градусовъ угла и протч. Данной уголъ занеимѣнїемъ угломѣра можно смѣрить и начертить тако: написавъ дугу положи по ней радїусъ и будетъ оная дуга въ 60; что (въ 124) доказано; потомъ раздѣли ея на 2, $\frac{1}{2}$ на 3, $\frac{1}{6}$ на 2, $\frac{1}{12}$, то есть 5 на 5 частей. По сему узнавъ величину 1 го градуса протчее уже легко совершится.

****

О СВОЙСТВАХЪ ПРЯМЫХЪ ЛИНѢЙ ВЪ ПОЛОЖЕНІИ ОДНОЙ СЪ ДРУГОЮ ИЛИ СО МНОГИМИ ПРОСТРАНСТВО НЕ ОКРУЖАЮЩИМИ.

43. Помысли теперь, что линѣя PO (фиг. 3) лежитъ вездѣ въ равномъ разстоянїи отъ AB; или будто движимая AB такъ шла отъ AB до OP, что ея часть RO ни сколько не склонялась къ AC, равно и RP

къ

къ СВ. Въ такомъ случаѣ прямая ОР называется паралель къ АВ; и оныя двѣ линѣи какъ видно ненаклонныя, и сколь далеко ни продолжась сойтись не могутъ. слѣдовательно паралельныя суть тѣ линѣи кои безконечно продолжась не пресекаются. Потомъ учиня какъ и прежде вращенїе движимой АВ на средней точкѣ С, ясно увидите.

44. Іе. Движимая АВ никогда не можетъ пересечь прямую ОР, пока она лежитъ на неподвижной АВ, ибо сѣ тогда дѣлаютъ одну прямую линѣю паралельную къ ОР.

45. II. Но какъ скоро движимая учинитъ наималѣйшее вращенїе на точкѣ С, такъ встретитъ и пересечетъ черту ОР буде оныя довольно продолжатся; ибо тогда часть движимой какъ АС здѣлается наклонною къ ОР, и каждая оной точка тѣмъ ближе будетъ къ ОР чемъ далѣ отстоитъ отъ точки С (27).

46. III. Движимая АВ переходя все степени наклоненїя къ неподвижной, перейдетъ также вездѣ тѣ же самыя градусы наклоненїя къ паралельли ОР, то есть учинитъ съ нею тѣ же углы наклоненїя какїя съ лежащею АВ. Ибо положимъ движимая

остано-

остановилась въ положенiи LG; а понеже линѣя OP есть паралельна къ AB, потому что движимая идучи отъ положенія AB къ OP (въ коемъ имѣла прежде съ LG уголъ BCL) ни сколько не склоняясь къ AB, дѣлала тотже уголъ съ LG пока пришла къ OP; и тако уголъ PSL мѣряющей ея наклоненіе къ LG равенъ углу BCL, а уголъ GCA = CSO: также и углы BCG, PSC, LSO, LCA между собою равныя, а острыя углы сумплементы тупыхъ; и обратно (39).

47. Уголъ GCA называется алтерно или противовнѣшней угла PSL, также уголъ GCB угла LSO. Уголъ же BCS имянуется противовнутренней угла CSO; такойже уголъ SCA угла CSP.

Тоже можно доказать о всѣхъ линѣяхъ LG, ED, MH, и проч: пересѣкающихъ паралельныя линѣи AB, OP; и отсюду явствуетъ.

48. I. Какая нибудь прямая GL секущая двѣ паралельли AB, OP, дѣлаетъ съ ними углы противовнутреннія и противовнѣшнія равныя и протч.

49. II. Обратно, буде двѣ линѣи BC, PS стоя на линѣѣ LG, дѣлаютъ съ нею углы противовнутреннія или противовнѣшнія

равныя

равныя или два внутреннїя ACS, OSC или внѣшнїя GCA, OSL одинъ другаго суплементы, тогда линѣи BC, PS суть паралельныя.

50. Примѣч. Что сказано здѣсь о двухъ паралельныхъ линѣяхъ, тоже надобно разумѣть и о многихъ иныхъ между собою паралельныхъ. Ибо свойства первой паралельли къ другой суть тѣже, какїя второй съ третьею, третьей съ четвертою и такъ далѣе; то есть ко всѣмъ онымъ паралельнымъ чертамъ равно принадлежатъ.

51. IV. Продолжая вращенїе движимой явствуетъ, что точки K, S и протчїя ея сеченїя съ OP пота все будутъ приближаться къ точкѣ C, пока движимая учинится перпендикуляромъ къ AC; и когда онымъ здѣлается, тогда точка R ея пересеченїя съ OP, будетъ въ кратчайшемъ разстоянїи отъ точки C. Потомъ идучи движимая къ AC, точки сеченїя Q, N и протч. тѣмъ далѣ будутъ отъ C, чемъ движимая болѣ наклонится къ CA.

52. Когда же движимая столько наклонится къ CA, здѣлавшись CM, сколько склонялась къ CB будучи CL; или тоже,

когда углы BCL, ACM, или ECL ECM, равныя, тогда точки сеченія S. Q будутъ въ равномъ разстояніи отъ C и R; то есть, SR = RQ, SC = QC.

Для лучшаго сгомъ понятія, думай что фигура третія будто перегнута на перпендикуляръ CE; ибо тогда безъ сомнѣнія BC соединится точно съ CA, PR съ RO, дуга BL съ равною себѣ AM, а дуга LE съ ME; посему радіусъ LC ляжетъ на радіусъ CM и точка S на Q: того ради SC = QC и SR = RQ. Отсюду явствуетъ.

53. I. Всякой перпендикуляръ какъ CR на чертѣ OP есть кратчайшая линѣя какую отъ C до оной линѣи OP провесть можно. И обратно, ежели линѣя CR есть кратчайшая отъ C до OP, то оная будетъ перпендикуляръ къ OP; ибо ежели бы была наклонна, то можно бы отъ точки C на OP провесть перпендикуляръ: то есть кратчайшую линѣю.

54. Слѣд. перпендикуляръ есть истинная мѣра разстоянія отъ точки до линѣи. Сіе и въ практикѣ наблюдается; какъ во измѣреніи ширины рѣкъ, рвовъ, и разстоянія всякаго предмѣта отъ стѣнъ, береговъ и прочч.

55.

55. II. Отъ точки C, коя внѣ линѣи OP, только одинъ перпендикуляръ CR на оную провесть можно, Ибо имѣется только одинъ падежъ, гдѣ линѣя отъ точки на другую проведенная ни въ которую сторону не бываетъ наклонною, и только одна точка какъ R линѣи OP быть можетъ ближе всехъ къ точкѣ C.

56. III. Прямая какъ CR, будетъ перпендикуляръ на другой OP ежели какія нибудь его двѣ точки какъ C, R, будутъ въ равномъ разстоянѣи отъ какихъ нибудь двухъ точекъ какъ S, Q линѣи OP; то есть ежели CS = CQ и RS = RQ. Ибо тогда точки C, R суть ненаклонныи ни къ S ни къ R, а чрезъ (11) и вся линѣя CR также не склоняется къ SQ.

57. IV. Ежели двѣ точки Q, S, суть въ равномъ разстоянѣи отъ R пресеченія линѣи QS перпендикуляромъ CR, тогда и всѣ онаго точки будутъ равно отстоять отъ точекъ Q, S. Ибо буде какая точка неравно отстоитъ отъ точекъ Q, S, тогда въ оной точкѣ перпендикуляръ наклонится въ ту сторону, гдѣ есть меньшее разстоянѣе и перпендикуляромъ болѣе уже быть не можетъ.

58. Ежели прямая CR которой нибудь изъ паралельныхъ AB, PO перпендикулярна, тогда оная линѣя будетъ разстоянїе тѣхъ паралельныхъ (53). По сему разстоянїе паралельныхъ линѣй или паралельной шпацїи есть спущенной перпендикуляръ отъ всякой точки одной линѣи на другую. Слѣд. перпендикуляры между паралельныхъ линѣй суть равныя, ибо оныя значатъ мѣру ихъ равнаго разстоянїя одной линѣи отъ другой.

И тако знавъ выше показанныя свойства можно легко уже рѣшить слѣдующїя проблемы или чертежныя задачи.

59. I. У точки a (ф. 4 и 5) на линѣѣ ab здѣлать уголъ равной данному BAC.

Рѣш: Изъ точекъ A и a какимъ нибудь однимъ разстоянїемъ означь двѣ дуги de, DH; и положа DE = de, чрезъ E проведи ac. Ибо по сочин: для равныхъ дугъ назначенныхъ однимъ радїусомъ (31) будутъ и углы равныя.

60. II. Отъ данной точки C (ф. 6) къ линѣѣ AB паралельную провесть.

Рѣшенїе. Постава конецъ цыркуля въ C напиши другимъ концомъ по изволенїю оной разствора, дугу AF; потомъ отъ A назначь тѣмже отверстїемъ дугу CF; здѣлавъ

давъ дугу CE = FA, чрезъ точки C, F проведи по линѣйкѣ прямую CD, которая будетъ паралель къ AB.

Доказ. Ибо проведя AC явно есть, что для равныхъ дугъ AF, CE уголъ CAE = ACF (31); но AC сечетъ линѣи AB, CD такъ, что углы алтерновнутреннія равныя; и по тому (49) линѣи CD, AB паралельныя.

61. III. Отъ точки c (ф. 4 и 5) къ линѣѣ ab, данной уголъ x приписать.

Рѣш. Начерти (59) biG = x. По томъ отъ точки c (60) проведя ca паралельно къ GI, будетъ (48) уголъ a = x.

62. IV. Къ данной линѣѣ CD (ф. 7) по данному разстоянію паралель провесть.

Рѣш. Съ концовъ или изъ точекъ F, E данной линѣи взявъ цыркулемъ опредѣленное разстояніе начерти двѣ дуги, то по касанію оныхъ проведенная линѣя AB будетъ паралель къ CD. Ибо линѣи fE, Fe явно видно суть разстояніи паралельныхъ CD, AB. (81) Сію и II, задачи можно рѣшить помощію паралельныхъ линѣякъ, какъ явствуетъ въ ф. 6. или по наугольнику съ линѣйкою въ ф. 7.

63. V. На прямую AB изъ точки ея I перпендикуляръ воставить (ф. 8).

РѢш. На линѢѢ AB, здѢлай произвольной величины CI = ID; и отъ точекъ C, D однимъ отверстїемъ цыркуля (которое было бы больше линѣи IC или ID двѣ дуги, кои пересекутся въ точкѣ E, чрезъ которую проведенная EI, будетъ перпендикулярна къ AB.

Доказ. Проведя радїусы CE, DE явно, что онѣ по сочиненїю равныя, также и CI, ID; и тако EI есть перпендикуляръ на AB, по тому что онаго двѣ точки E, I въ равномъ разстоянїи отъ двухъ точекъ C, D прямой AB (56).

64. VI. Изъ данной точки E на линѣю AB перпендикуляръ провесть (ф. 9).

РѢш. Поставя конецъ цыркуля въ точку E, а другимъ отворя произвольно означь дугою на прямой AB точки C, D. По томъ изъ точекъ C, D, также какимъ нибудь разстоянїемъ начерти дуги тогда чрезъ E и чрезъ пресеченїе оныхъ точку F проведенная линѣя EF будетъ желаемой перпендикуляръ.

Доказ. Проведя радїусы CF, DF, CE,

DE

DE увилите какъ и выше сего (63), что точки F, E, суть въ равномъ разстоянiи отъ точекъ C, D прямой AB; и по тому FE или EI къ оной перпендикулярна.

65. Сiи двѣ проблемы можно удобнѣе рѣшить помощiю наугольника, а для длинныхъ перпендикуляровъ должно при наугольникѣ линѣйку употреблять какъ явствуетъ (ф. 11). Но прежде сего дѣйствiя надлежитъ повѣрить наугольникъ по перпендикуляру геометрически проведенному, или перемѣнно прикладывая оба онаго края къ линѣйкѣ должно назначить по онымъ на бумагѣ или на доскѣ двѣ черты и протч.

66. VII. Данную прямую AB, (ф. 10) на двѣ равныя части раздѣлить.

Рѣш. Изъ концовъ линѣи, A, B по обѣ стороны назначь однимъ отверстiемъ циркуля четыре дуги, которыя пересекутся въ точкахъ D, C; то чрезъ оныя проведенная линѣя DC раздѣлитъ AB на двѣ равныя части въ точкѣ I.

Доказ. Понеже точки D, C по сочиненiю суть въ равномъ разстоянiи отъ концовъ линѣи AB; по тому (57) и всѣ точки прямой DC также отъ нихъ равно

отстоятъ: того ради точка I есть въ срединѣ линѣи AB.

* *

О нѣкоторыхъ свойствахъ прямыхъ линѣй съ кругомъ.

67. Прямая NK (ф. 3) дугою круга содержимая, называется хорда. По сему дуги NEK хорда есть NK. Хорда NE и EK содержитъ дугу NME и ELK и протч.

68. Часть круга содержимая между дугою и ея хордою какъ NEMN называется Сегментъ круга, а часть MCE или ACN включенная межъ дуги и двухъ радіусовъ имянуется Секторъ круга.

69. I. Перпендикуляръ CE проведенной изъ центра C круга на хорду NK, дѣлитъ ея на двѣ равныя части.

Доказ. Понеже точка C перпендикуляра CE есть въ равномъ разстояніи отъ предѣловъ хорды N, K; а по тому и всякая его точка (57) въ равномъ же разстояніи отъ N, K: и тако NR = RK.

70. II. И обратно, всякая прямая CE, которая перейдя центръ C сечетъ пополамъ хорду NK перпендикулярна есть къ оной хордѣ.

Доказ.

Доказ: Ибо хорда раздѣлена пополамъ; того ради NR = RK. Но при томъ NC = CK; по сему двѣ точки R, C линѣи CE, суть въ равномъ разстоянїи отъ концовъ хорды NK. и тако (56) CE есть перпендикуляръ на NK.

71. III. Ежели прямая CE къ хордѣ NK перпендикулярна и пересскаетъ ся пополамъ, тогда проходитъ чрезъ центръ C круга.

Доказ. Тойже перпендикуляръ CE делитъ хорду пополамъ; того ради NR = RK. А по свойству онаго всѣ его точки должны равно отстоять отъ N, K (57); но NC = CK (31); и тако центръ C есть одна изъ точекъ перпендикуляра CE.

72. Двѣ хорды не переходящїя обѣ чрезъ центръ не могутъ пополамъ раздѣлиться.

Доказ. Пусть f (ф. 12) будетъ общая средина хордъ mp, in; тогда проведенная линѣя Cf должна быть (70) перпенд. къ mp и къ in, а сїе противно (36).

73. Ежели помыслите, когда хорда NK, или секторъ CNEKC около центра C въ кругѣ вращается, тогда здѣлается; что хорды концы N, K нигдѣ не выдутъ изъ

 окружности

окружности и притомъ 1 е. Сія хорда вездѣ будетъ содержать дуги равныя. 2 е. и въ равномъ разстояніи отъ центра; и уголъ NCK нигдѣ не перемѣнится, по тому что его мѣра всегда равна дугѣ NPK. при томъ же и линѣя CR въ ономъ движеніи тажъ пребудетъ: и отъ сюду явствуетъ.

74. I. Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ, у равныхъ хордъ дуги равныя, а неравныхъ неравныя. Равныя хорды равно отъ центра отстоятъ, а неравныя неравно отстоятъ. Ибо хорда вращаясь въ своемъ кругѣ на хорды себѣ неравныя лечь не можетъ.

75. II. Въ одномъ или въ равныхъ полукругахъ, чемъ дуги велики или малы тѣмъ ихъ хорды длиннѣе или короче, и тѣмъ ближе или далѣ отъ центра отстоятъ; и обратно.

76. III. Прямая CE (ф. 3) проведенная чрезъ средину хорды NK отъ центра C, раздѣляетъ дугу NEK также и уголъ ея NCK на двѣ равныя части.

Доказ. Ибо линѣя CR будетъ перпендикул. хордѣ NK (70). И по тому точка E есть въ равномъ разстояніи отъ концовъ

N, K,

N, K: то есть проведя EN, EK, оныя будутъ двѣ хорды равныя, и (74) дуга EN = EK; того ради дуга NEK также и уголъ NCK радїусомъ пополамъ раздѣлены.

77. IV. Хорда NK будучи паралельна дїаметру AB заключаетъ съ нимъ по обѣ стороны равныя дуги AN, EK.

Доказ. Буде отъ центра C на AB поставить перпендикуляръ CE, то оной будетъ также перпенд. хордѣ NK (48), и раздѣлитъ (69) ея пополамъ; по тому и (76) дуга ANE = EKB, NME = ELK: и тако отнявъ равныя дуги NE, EK отъ равныхъ AE, EB останутся равныя AN, EK. Отъ сего слѣдуетъ.

78. Iе Паралельныя DE, HR (ф. 12) секущїя кругъ заключаютъ по обѣ стороны равныя дуги ad, be. Ибо буде чрезъ центръ C провесть дїаметръ AB онымъ паралельно, тогда будетъ Aa = Bb, Ad = Be, а по тому и Ad − Aa = Be − Bb, или ad = be. Но естьли паралельная DE случится въ другой половинѣ круга, тогда будетъ Ad + Am = Be + Bi, то есть md = ie.

79. IIе. Положимъ линѣя HR (ф. 12)

сама

сама себѣ или прямой DE вверхъ движится паралельно, и пришедъ въ положенiе rh только заденетъ окружность въ точкѣ q; тогда будетъ aq = bq точки же ея a, c сближиваться будутъ по мѣрѣ удаленiя отъ центра C прямой HR, и наконецъ въ точкѣ q соединятся, гдѣ оная линѣя только прикоснется окружности.

80. Прямая касающая кругъ и какъ бы не продолжилась въ оной не входитъ называется Тангенсъ или касательная; а точка въ коей оная кругъ касаетъ точка касанiя имянуется.

81. Радiусъ Cq (ф. 12) проведенной чрезъ точку касанiя q есть перпендикуляръ тангенсу hr.

Доказ. Понеже тангенсъ hr только касаетъ окружность въ точкѣ q; того ради радiусъ Cq, есть кратчайшее разстоянiе отъ центра C до сего тангенса: и по тому (53) Cq есть перпендикуляръ къ касательной hr.

82. Слѣд. Линѣя прямая только одну точку окружности касаетъ. Понеже отъ центра C на hr кромѣ (55) одного перпендикуляра провесть не можно.

83. И обратно какая нибудь прямая hr къ концу q радиуса Cq перпендикулярная, касаетъ кругъ только въ одной сей точкѣ q.

доказ. Понеже радїусъ есть перпендикуляръ на hr, и потому оной есть кратчайшее разстоянїе отъ центра C до линѣи hr, которой всякая иная точка далѣ лежитъ отъ центра нежели q: того ради всѣ оной точки кромѣ одной q суть внѣ круга, и отсюду слѣдуетъ.

84. I. Чрезъ данную точку q, окружности тангенсъ проводится тако: назнача отъ центра прямую Cq, а изъ точки q (63) должно воставить перпендикуляръ hr на линѣю Cq.

85. II. Данной точкѣ на окружности кромѣ одного тангенса провесть не можно (36): то есть ежели чрезъ точку касанїя проведется другая линѣя, тогда она неминуемо должна или соединиться съ тангенсомъ либо войтить въ кругъ, а между тангенсомъ и окружностью, явно видно, не пройдетъ; но токмо можно провесть несмѣтное число окружностей касающихъ тангенсъ въ одной точкѣ q.

86. Угла BAD (ф. 13) состоящаго у

точки касанія A между тангенсомъ Bb и хордою AD есть мѣра, половина дуги AFD содержимой тою хордою.

Доказ. Проведя чрезъ центръ C діаметръ EG паралельной хордѣ AD, и діаметръ fF къ оной перпендикулярно, и радіусъ CA; будетъ уголъ BAC прямой (81), такойже и уголъ FCG, коихъ мѣра есть дуга FG; но уголъ DAC = ACG (48), и тако отнявъ равныя углы отъ прямыхъ останется уголъ BAD = ACF; потому дуга FA = ½ AFD (76) есть мѣра углу BAD. Равнымъ образомъ докажется что и ½ AfD мѣра углу bAD.

87. Угла EAF (ф. 14) у окружности круга есть мѣра половина дуги EF, сторонами его AE, AF содержимая.

Доказ. Чрезъ верхъ угла A проведи (84) тангенсъ BD; тогда сумма трехъ угловъ DAF + FAE + EAB = 180° (38) = ½ дуги AF + ½ EF + ½ EA, но угла DAF мѣра ½ AF, а угла (86) EAB дуги ½ AE: потому угла EAF есть мѣра полдуги EF. И отъ сего слѣдуетъ.

88. 1 с. Уголъ ECF (ф. 14) у центра круга двойной угла EAF у окружности на тойже дугѣ EF стоящаго.

89. II. Отъ концовъ дїаметра ко всякой окружности проведенныя линѣи, дѣлаютъ приней прямой уголъ: или прямой уголъ въ окружности опредѣленной содержитъ своими сторонами полкруга и стоитъ на дїаметре. Острой уголъ содержитъ меньше а тупой больше полкруга и стоятъ на хордахъ.

90. III. сколько нибудь угловъ mni, moi, mpi (ф. 12) и проч. имѣющїя свои верхи въ окружности и стоятъ на одной дугѣ mqi или наравныхъ дугахъ между собою всегда равныя.

91. IV. Противолежащихъ двухъ угловъ сумма кои стоятъ въ кругѣ на одной хордѣ, у окружности равна двумъ прямымъ, изо оныхъ мѣра есть половина ихъ дугъ или половина окружности: то есть два прямыя угла. По сему (ф. 12) уголъ mdi + mni = moi + mbi = 180 и протч.

92. Изъ сихъ свойствъ находится другой способъ какъ чрезъ данную точку напримѣръ a, къ линѣе mi паралель провесть. Возми по пристойности некоторую точку какъ C за центръ и разстоянїемъ Ca напиши кругъ. Потомъ положа ib = ma.

проведенная

проведенная линѣя ab будетъ паралельна mi. Ибо по сочиненію дуга am = ib; посему (90) уголъ imb = abm, и тако (49) mi, ab суть паралельныя.

93. Также изъ конца B (ф. 11) линѣи AB можно на оную воставить перпендикул. другимъ способомъ. Избравъ нѣкоторую точку какъ C за центръ разстояніемъ CB напиши дугу EBD, потомъ проведи ED и BD. Ибо (89) въ полкругѣ уголъ DBE есть прямой; посему (35) BD перпендикуляръ на AB.

94. Угла BAD (ф. 15 и 16) внутри и внѣ круга положеннаго есть мѣра $\frac{1}{2}$ BD ± $\frac{1}{2}$ CE. Знакъ + для внутреннаго угла (ф. 15) а знакъ − для внѣшняго (ф. 16).

Доказ. Чрезъ E къ AD проведи паралельно хорду EF: тогда (48) уголъ BEF = BAD. Но мѣра угла BEF = $\frac{1}{2}$ BF (87), $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD ± $\frac{1}{2}$ DF, а (78) DF = CE. Посему $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD ± $\frac{1}{2}$ CE. Отсюду слѣдуетъ.

95. I. Угла dAD (ф. 16) между тангенсомъ Ab и прямою AD есть мѣра $\frac{1}{2}$ Db = $\frac{1}{2}$ bC. Ибо, вращая AB около точки A пока оная здѣлается тангенсомъ въ b, тогда точки E, B соединятся въ b.

96. II. Такожде угла dAb, содержи-

маго

маго между двухъ тангенсовъ Ad, Ab есть мѣра $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

97. III. отъ общей касательной точки до хорды проведанныя части окружностей содержутъ равное число градусовъ, то есть, служатъ они мѣрою одному углу; ибо каждой дуги половина (86 и 87) есть мѣра тогоже угла EAD (ф. 37)

98. пробл. I. Данную дугу на двѣ равныя дуги раздѣлить.

рѣш. Проведя хорду той дуги, пересеки оную перпендикуляромъ въ средней точкѣ (66); чрезъ сïе данная дуга также пополамъ раздѣлится (76).

99. II. Данной уголъ на двѣ равныя части раздѣлить.

рѣш. Поставь конецъ цыркуля на верьху угла и произвольнымъ разстоянïемъ между сторонами угла начерти дугу; раздѣли сïю дугу пополамъ (98): потомъ чрезъ верьхъ угла и средину дуги проведенная линѣя раздѣлитъ уголъ пожеланïю

100. III. Чрезъ три данныя точки окружность круга начертить.

рѣш. Проведя двѣ линѣи три данныя точки соединяющïя, то есть хорды иско-

маго круга, раздѣли оныя пополамъ двумя перпендикулярами (66), кои пройдутъ (71) чрезъ центръ круга; по сему оной центръ будетъ въ ихъ пресѣченіи. При томъ сія задача была бы не возможная ежели бы три точки были въ одной прямой линѣѣ.

101. IV. Даннаго круга или дуги центръ сыскать.

Рѣш. Проведи по изволенію въ данномъ кругѣ или дугѣ двѣ хорды, потомъ найди (100) центръ.

102. V. Данную дугу круга въ цѣлой кругъ продолжить.

Рѣш. Найди (101) той дуги центръ.

103. VI. Чрезъ данную точку T къ кругу Q касательную линѣю провесть (ф. 17).

Рѣш. Отъ точки T къ центру проведи TC, а изъ средины оной E начерти полкруга TAC; то чрезъ точку пресѣченія A, проведенная линѣя TAN будетъ касательная данному кругу Q.

Доказ. Проведя радіусъ CA, явно (89) что уголъ TAC прямой; по сему (35) TA есть перпендикуляръ къ концу радіуса CA, и касаетъ кругъ въ точкѣ A.

104.

104. VII. Заданнаго круга отъ точки A хордою часть отдѣлить, въ которой бы при окружности содержался уголъ равной данному углу (ф. 13).

рѣш. Чрезъ точку A проведи касателн. Bb; (84) и къ оной здѣлай (59) уголъ BAD равной данному буде онъ острой (или bAD ежели тупой), тогда отдѣлится часть DfA, въ которой при окружности всякой уголъ равенъ будетъ данному. Ибо (86) уголъ BAD = ½ дуги AFD = ½ ACD, то есть (87) равенъ всякому углу при окружности DfA; а углу bAD, равенъ всякой сущей при дугѣ DFA на хорде AD.

105. VIII. На заданной линѣѣ какъ AD (ф. 13) часть круга написать, въ которой бы всякой уголъ равенъ былъ данному.

рѣш. При A здѣлай (59) уголъ DAB равной данному острому. Изъ A на Bb воставленной, а другой AD пополамъ раздѣляющей перпендикуляры сойдутся въ точкѣ C, изъ которой разстоянїемъ AC, описаннаго круга хорда AD отдѣлитъ искомую часть круга AfD; а для тупаго угла часть AFD (104).

* *

О свойствахъ прямыхъ линѣй пространство окружающихъ.

106. Прямыя линѣи общею смычкою заключаютъ пространство, называемое прямолинѣйная фигура: но какъ смычка многихъ линѣй дѣлается углами; по тому прямолинѣйная фигура Полигонъ или многоугольникъ имянуется.

107. Полигонъ Вообще значитъ пространство отъ многихъ прямыхъ ограниченное называемыхъ онаго бока или стороны, и кои концами своими соединясь столькожъ угловъ сколько и боковъ составляютъ.

108. Всякому извѣстно, что пространство не меньше какъ отъ трехъ линѣи ограничивается: того ради перьвѣйшей и простѣйшей изъ полигоновъ есть триугольникъ; второй четыреугольникъ, то есть фигура о четырехъ сторонахъ и углахъ; третей пятиугольникъ и проч. Полигоны отъ числа ихъ угловъ или сторонъ получаютъ названiе: то есть фигура о шести, семи, осми и проч. бокахъ и углахъ называется

зывается шестиугольникЪ, семиугольникЪ, осмиугольникЪ и проч.

полигоны вЪ кругѢ вписанные разумѢются тѢ, коихЪ концы и углы состоятЪ вЪ окружности; а около круга описанныя, коихЪ стороны касаютЪ точно его окружность.

Понеже всякой полигонЪ неминуемо приводится вЪ триугольникЪ, о чемЪ далѢ сего будетЪ показано; того ради наипаче свойства триугольниковЪ сперва знать надлѢжитЪ.

* *

О РАЗНЫХЪ ВИДАХЪ И СВОЙСТВАХЪ ТРИУГОЛЬНИКОВЪ.

109. ТриугольникЪ по различному виду своихЪ сторонЪ и угловЪ разныя имена получаетЪ.

ВЪ рассужденiи сторонЪ. ТриугольникЪ называется равнобочной, котораго три стороны равныя между собою, какЪ ABC (ф. 18). У котораго только бокЪ AC=AB, (ф. 19) тотЪ имянуется равнобедреной (изозсель). Коего всѢ стороны неравныя, какЪ ABC (ф. 20) называется неравносторонной (скаленЪ).

110. По состоянiю его угловЪ. ТриугольникЪ имѢющей три угла острыя какЪ ABC

(ф. 18) называется остроугольной. Но въ которомъ уголъ прямой, какъ А (ф. 19) тотъ прямоугольной. А въ коемъ уголъ тупой какъ С (ф. 20), тупоугольной. При томъ же остроугольныя и тупоугольныя треугольники вообще называются косоугольными.

111. Въ прямоугольномъ треугольникѣ какъ АВС (ф. 19) сторона ВС противолежащая прямому углу А называется ипотенуза.

112. Во всякомъ треугольникѣ сторона супротивная углу имянуется база или основаніе онаго угла. Отселѣ слѣдуетъ.

113. I. Около всякаго треугольника кругъ описанъ быть можетъ, то есть, можно провесть кругъ чрезъ три угла всякаго треугольника; ибо тоже самое, что чрезъ данныя три точки кругъ описать (100).

114. II. Всякаго треугольника сумма трехъ угловъ = 180 или двумъ прямымъ угламъ.

Доказ. Написавъ какойлибо треугольникъ въ кругѣ, то его стороны будутъ хорды, и каждаго угла мѣра (87) есть

полду-

полдуги содержимой сопротивною стороною; посему сумма трехъ угловъ равна полсуммѣ трехъ дугъ, то есть полуокружности или 180, а изъ того явствуетъ.

115. I. Треугольникъ имѣетъ только одинъ прямой либо одинъ тупой уголъ, а протчія два тогда неминуемо суть острыя. Всѣ углы треугольника могутъ быть острыя; сіе зависитъ отъ раздѣленія 180, на три доли такъ, чтобъ никокоторая не болѣ была 90.

116. II. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма двухъ острыхъ угловъ равна 90; и по тому одинъ уголъ бываетъ комплементъ другаго.

117. III. Ежели какого нибудь треугольника знаема величина двухъ угловъ, то познается и третьяго; ибо оной равенъ разности между 180 и суммою двухъ данныхъ угловъ: а буде знаемъ одинъ уголъ, то его суплементъ равенъ есть суммѣ протчихъ двухъ.

118. III. Во всякомъ треугольникѣ какъ ABC (ф. 18) ежели продолжится коя нибудь сторона какъ AC, то внѣшней уголъ BCD будетъ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ сопротивныхъ A, B.

Доказ. Сумма внѣшняго угла БCD со внутреннимъ ACB есть 180 (38); но (114) сумма трехъ угловъ также равна 180. По сему внѣшней уголъ БCD равенъ суммѣ внутреннихъ сопротивныхъ угловъ A, B. слѣдовательно внѣшней уголъ каждаго изъ внутреннихъ супротивныхъ есть больше.

119. IV. Всякаго триугольника сумма, которыхъ нибудь двухъ сторонъ есть больше третьей; ибо прямая AB (ф. 20) есть кратчайшее разстоянïе между A и B (9). Сверхъ того не можетъ быть AC + CB = AB ни AC + CB меньше AB, по тому что такïя линѣи не занявъ пространства пересекутъ основанïе въ одной либо въ двухъ точкахъ.

120. V. Ежели отъ нѣкоей внутренней точки какъ D (ф. 20) въ триугольникѣ ABC, провесть линѣи DA, DB, DC; тогда каждой уголъ при D будетъ супротивнаго себѣ больше.

Доказ. Продолжа DA въ E будетъ (118) уголъ BDA, болѣ угла BED; но уголъ BED болѣ есть угла C. По сему уголъ ADB есть болѣ угла C, равно и о протчихъ. При томъ же AC + CB больше не жели AD + DB (119).

121.

121. VI. Всякаго треугольника большая сторона на противъ лежитъ большаго угла, а малая малаго. Обратно, большой уголъ соотвѣтствуетъ большому боку; а малой уголъ малому. Ибо написавъ кругъ около треугольника окажется, что большаго угла есть мѣра большая дуга: а (75) большую дугу содержитъ большая хорда, и обратно.

122. Слѣдовательно, чемъ уголъ треугольника ширѣ расстворится, коего стороны да будутъ одной величины, тѣмъ супротивная сторона расходящемуся углу болѣ увеличится; и обратно; та сторона умалится, буде ея супротивной уголъ умалится.

123. VII. Во всякомъ треугольникѣ изъ угла на основанiе опущенной перпендикуляръ падаетъ внутрь треугольника есть ли угла при томъ основанiи острыя; а буде изъ оныхъ одинъ тупой, то перпендикуляръ падетъ внѣ на продолженное основанiе. Ибо (115) во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ изъ внутреннихъ тупаго угла быть не можетъ. Перпендикуляръ же во всякомъ треугольникѣ какъ въ BAC (ф. 22) проводится тако: изъ сре-

дины одной стороны какЪ AB, опиши полкруга ADB, то проведенная черта AD будетЪ (89) перпендикулярна кЪ BC.

124. VIII. Равностороннаго треугольника углы между собою равныя и каждой по 60; обратно, ежели всѣ углы равныя, или два по 60, такой треугольникЪ есть равнобочной. Ибо написавЪ около треугольника кругЪ; три равныя стороны будутЪ три хорды равныя, кои содержатЪ дуги равныя, а оныхЪ половины суть мѣры трехЪ равныхЪ угловЪ и каждой оныхЪ есть треть 180, то есть по 60 и проч. Слѣдовательно хорда дуги 60 ти градусовЪ равна той дуги радїусу (24).

125. IX. Равнобедреннаго треугольника углы противныя равнымЪ сторонамЪ суть равныя и обратно; ибо написавЪ треугольникЪ вЪ кругѣ, равныя углы содержутЪ дуги равныя, а оныя дуги связуютЪ хорды равныя (74).

126. Слѣдоват. ВЪ изозселѣ или вЪ равнобедренномЪ треугольникѣ QCS изЪ угла C (ф. 3) имѣющаго равныя стороны QC, SC на основанїе QS опущенной перпендикулярЪ CR раздѣляетЪ оное на двѣ

равныя

равныя части QR, RS, для равныхъ наклонностей двухъ равныхъ сторонъ QC, SC (52). Въ равнобочномъ и въ равнобедренномъ треугольникахъ, ни одинъ уголъ не бываетъ прямымъ и тупымъ. Зная одинъ уголъ равнобедреннаго треугольника узнаются и прочїя два.

127. X. Во всякомъ треугольникѣ кругъ написанъ быть можетъ.

Доказ. Которыя нибудь два угла треугольника раздѣли пополамъ: напримѣръ углы A, B треугольника ABC (ф. 19) прямыми BD, AD, кои сойдутся въ D. Потомъ отъ точки D проведенныя на каждую сторону перпендикуляры будутъ между собою равныя, и радїусы круга, которой касаетъ три стороны въ точкахъ G, F, E (83). Ибо (133) прямоугольной △ BDE = GBD, по тому что углы GBD, DBE равныя, и бокъ BD общей, и тако GD = DE; а для равныхъ треугольниковъ DFA, DEA, будетъ DE = DF. Того ради GD = DE = DF.

128. Слѣдоват. три линѣи раздѣляющїя пополамъ три угла треугольника сходятся въ одной точкѣ. Ибо явно, буде раздѣлится и третей уголъ C пополамъ линѣею, то и оная придетъ въ туже точку D.

осрав-

* *

О сравненіи треугольниковъ.

129. У Геометровъ сравненіе треугольниковъ и всѣхъ протчихъ фигуръ бываетъ двоякое: по одному сравниваютъ положеніе сторонъ и величину ихъ угловъ; по другому содержимыя въ оныхъ фигурахъ площади. Сіе второе сравненіе принадлежитъ до Планометріи; того ради здѣсь только о первомъ сравнени разсуждать будемъ.

Равныя между собою треугольники называются тѣ, которыхъ всѣ сходственныя углы и стороны между собою равныя.

130. Подобныя или равноугольныя треугольники имянуются тѣ, которыхъ только всѣ углы между собою равныя одинъ другому; итако треугольники ABC, DEF (ф. 20) суть подобныя, потому что уголъ A = E, B = D, C = F.

131. При сравненіи фигуръ между собою, сходственныя части называются тѣ, кои суть одного званія величины въ каждой фигурѣ: напримѣръ двухъ подобныхъ треугольниковъ большой бокъ одного есть сход-

ственной

ственной большему же боку другаго треугольника, средней среднему, а меньшой меньшому. Отсюду слѣдуетъ.

132. I. Два треугольника имѣющія всѣ свои сходственныя стороны равныя, и между собою суть равныя.

Доказ. Говорю ежели AB = ab, AC = ac, BC = bc (ф. 22) тогда △ ABC = abc; ибо ежели одинъ △ наложится на другой тако, полагая сперва точку a на A, тогда для AB = ab, точка b придетъ на B, а для равныхъ сторонъ, AC = ac, BC = bc точка C не минуемо падетъ на точку C, также ac точно ляжетъ на AC, bc на BC, и весь △ abc совершенно закроетъ △ ABC. По сему онѣ во всѣхъ своихъ частяхъ будутъ равныя.

133. II Два треугольника равныя, когда все углы одного равны угламъ другаго, и при томъ въ каждомъ по равной сходственной сторонѣ.

Доказ. Ежели уголъ A = a, B = b, C = c (ф. 22) и AB = ab; говорю △ ABC = abc. Ибо полагая △ abc на ABC, сперва ab на AB, тогда для угловъ A = a, b = B, сторона ac не минуемо падетъ на AC,

а

а bc на BC и сойдутся въ одной точкѣ, то есть, точка c падетъ на C и △ abc точно закроетъ △ ABC.

134. III. Два треугольника будутъ равныя ежели у каждаго двѣ сходственныя стороны равныя и по равному углу оными сторонами содержимому.

Доказ. буде AC = ac, AB = ab и уголъ A = a; тогда △ ABC = abc. Ибо полагая ab на AB, ac на AC, то сіи стороны для угла A = a падутъ точно одна на другую; а для равности сторонъ точка c падетъ въ C, а b въ B и бокъ bc на BC: и тако △ abc совершенно закроетъ △ ABC.

135. Когдаже въ двухъ треугольникахъ по двѣ сходственныя стороны равныя, и по одному углу прилежащему къ одной изъ тѣхъ сторонъ, то такія треугольники могутъ быть равныя и неравныя. Ибо положа BA = ba, AC = ac, уголъ B = b (ф. 22), и отъ a радіусомъ ac написавъ дугу cE будетъ Ea = ca, и △ bca болѣ bEa.

136. IV. Ежели двухъ треугольниковъ подобныхъ а неравныхъ положить уголъ D одного на равной ему уголъ другаго B и бокъ DF на сходств: BC, а DE на BA; тогда

бокъ FE или fe паралельны будутъ къ AC. Ибо для подобныхъ триугольниковъ, уголъ feB = CAB, того ради (49) fe съ AC паралельныя.

Но буде уголъ F положится на равной себѣ C, тогда DE съ AB будутъ паралельныя. А наложа уголъ E на равной сему A, то FD съ BC здѣлаются также паралельныя между собою.

137. И обратно ежели чрезъ точку f взятую на сторонѣ триугольника, проведется линѣя fe къ его основанїю AC паралельно, тогда для равныхъ угловъ Bfe = C, Bef = A (48), триугольники Bfe, BAC, будутъ равноугольныя или подобныя.

138. Двѣ линѣи равныя и паралельныя BC, FE (ф. 24) соединяютъ также двѣ равныя и между собою паралельныя линѣи BF, CE.

Доказ. Ибо проведя CF, для паралельныхъ BC, EF (48) уголъ EFC = BCF; а въ равныхъ триугольникахъ FEC, BCF (134), CE = bF и уголъ ECF равенъ есть углу BFC; по сему (49) BF, CE паралельныя и равныя.

Слѣдов. Паралельныя линѣи между другихъ паралельныхъ, между собою равныя.

139. Пробл. I. Въ неравносторонномъ треугольникѣ данной величины линѣю паралельно одной сторонѣ помѣстить. Рѣшить чрезъ (60) а доказ. (138).

140 II. Около круга начертить треугольникъ подобной данному BAC. (ф. 18 и 19)

Сочин. Проведя радїусъ DG, здѣлай (59) уголъ GDF = суплем. угла A, а GDF = суплем. угла B; послѣ чрезъ точки G, E, F проведенныя кругу касательныя линѣи (84) здѣлаютъ своимъ пресеченїемъ △ BAC подобной данному BAC.

Доказ. Ибо проведя GF, явно, что въ двухъ треугольникахъ GCF, GFD сумма шести угловъ равна четыремъ прямымъ, но уголъ F + G равны двумъ прямымъ, потому и уголъ D + C = двумъ прямымъ; слѣдовательно уголъ C = C, B = B и A = A. Того ради (130) треугольникъ BCA подобной данному.

141. III. Въ кругѣ написать треугольникъ подобной данному ABC (ф. 21 и 23).

Рѣш. Проведя касательную DF здѣлай уголъ DEG = B, а уголъ FEH = C. Проведи GH и будетъ треугольникъ GHE (86, 87) равноугольной или подобной треугольнику BCA.

о прот-

* *

О прочихъ полигонахъ.

142. Полигоны суть трехъ видовъ, а имянно: иррегулярныя или неправильныя, симетрическія, и регулярныя или правильныя.

143. Неправильныя полигоны тѣ, которыхъ стороны и углы между собою неравныя (ф. 27. 29).

144. Полигоны симетрическія называются состоящія изъ паралельныхъ и равныхъ сторонъ (ф. 24. 25. 26. 30. 31.), потому оныя всегда чотъ сторонъ имѣютъ.

145. Правильныя полигоны имянуются тѣ, которыхъ всѣ стороны и углы между собою равныя, (ф. 31. 32.)

146. Правильной четыреугольникъ называется квадратъ (ф. 25). Неправильной, Трапезоидъ (ф. 27.); а ежели онаго двѣ стороны паралельны, такой четыреугольникъ имянуется Трапеція (ф. 34). Симетрической полигонъ называютъ всякой Паралеллограмъ; буде у онаго углы прямыя, тогда имянуютъ его Прямоугольникомъ (ф. 28.). Ежели же онъ косоугольной и равнобочной, тогда называется

Ромбъ. Симетрической же полигонъ косоугольной и неравнобочной имянуется Ромбоидъ (ф. 24). Всякой четвероугольникъ изъ паралельныхъ сторонъ состоящей вообще паралеллограмъ называется.

147. Уголъ выдавшей есть тотъ, котораго верьхъ изъ фигуры вышелъ, какъ ABC (ф 29). А впадшей уголъ тотъ, котораго верьхъ въ фигурѣ какъ BCD. По сему впадшие углы только неправильныя и симетрическія полигоны имѣютъ; понеже всѣ углы правильнаго полигона межъ собою суть равныя (145).

148. Прямая черта въ полигонѣ отъ одного угла къ другому проведенная называется діагональ.

149. Всякаго полигона сумма всѣхъ сторонъ обводъ или перимѣтръ имянуется.

150. Во всякомъ правилномъ полигонѣ (какъ въ ф. 31) перпендикуляръ изъ средней онаго точки C на бокъ опущенной какъ CK называется апотѣмъ.

* *

О СВОЙСТВАХЪ ПОЛИГОНОВЪ ВООБЩЕ.

151. I. Полигоны съ вышедшими и впадшими углами могутъ раздѣлятися на столько треугольниковъ, сколько у оныхъ сторонъ; ибо изъ точки

C

С (ф. 27 и 32) по изволенію въ полигонѣ взятой, можно провесть линѣи ко всѣмъ его угламъ, и стороны полигона будутъ основанія тѣхъ треугольниковъ.

152. II. Сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ полигона равна произведенію, умножа 180 числомъ сторонъ изключая двѣ стороны, либо 360.

Доказ. Ибо сумма угловъ полигона равна суммѣ всѣхъ угловъ его треугольниковъ, изключая углы въ немъ при точкѣ С, коихъ (37) сумма = 360. Но число треугольниковъ равно числу сторонъ; и тако сумма угловъ полигона имѣетъ столько разъ по 180 сколько онаго сторонъ выключая 360. Напримѣръ въ семиугольникѣ сумма всѣхъ угловъ = 180 × 5 или (7 − 2) = 900.

153. Всякой уголъ правильнаго полигона равенъ квотусу по раздѣленіи суммы всѣхъ его угловъ на число сторонъ; того ради за симъ слѣдуетъ табличка угловъ нѣкоторыхъ правильныхъ полигоновъ по сравненію ихъ съ прямымъ угломъ.

 число

число сторонъ	углы полигона	содержаніе	число сторонъ.	углы полигона	содержаніе
III	60°	2 : 3	VIII	135	3 : 2
IV	90	1	IX	140	14:9
V	108	6 : 5	X	144	8 : 5
VI	120	4 : 3	XI	$147\frac{3}{11}$	18:11
VII	$128\frac{4}{7}$	10:7	XII	150	5 : 3

154. III. Сумма всѣхъ суплементовъ угловъ всякаго полигона неимѣющаго впадшихъ угловъ равна 360°.

Доказ. Ибо (38) каждой внутренней уголъ съ своимъ суплементомъ = 180°; по сему сумма всѣхъ внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ равна произведенію 180° числомъ сторонъ; но (152) сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ = 180° умножа числомъ сторонъ выключая 360°. И тако сумма всѣхъ внѣшнихъ угловъ равна 360°.

155. IV. Ежели у полигона имѣются впадшія углы, тогда сумма всѣхъ суплементовъ вышедшихъ угловъ со впадшими = 360° сложа произведеніе 180° числомъ впадшихъ угловъ.

Доказ,

Доказ. Ибо явно (ф. 29). что сумма суплементовъ выдавшихъ угловъ полигона ABDEF = 360 (154): но ежели въономъ полигонѣ здѣлается одинъ впадшей уголъ DCB; то ∠ GDB суплем. угла EDB прибавится угломъ BDC; а ∠ DBI суплем. угла ABD угломъ CBD. Но сумма угловъ въ △ BCD = 180 (114). По сему когда въ полигонѣ есть одинъ впадшей уголъ, то суплементы двухъ ближнихъ вышедшихъ угловъ прибавятся количествомъ, которое со впадшимъ угломъ = 180. Того ради полигонъ имѣющей впадшїя углы и проч.

156. Примѣч. буде полигонъ раздѣлится на столько триугольниковъ сколько у онаго сторонъ выключая двѣ, то есть, ежели проведутся отъ одного угла ко всѣмъ прочимъ дїагонали безъ взаимнаго ихъ пресеченїя (ф. 29), и какъ сумма всѣхъ угловъ во оныхъ триугольникахъ равна есть суммѣ всѣхъ внутреннихъ угловъ полигона, по сему въ ней столько есть по 180 сколько триугольниковъ, или равно числу сторонъ полигона безъ двухъ. Сїе доказательство обстоятельнѣе нумѣра 152, въ коемъ полагается, что никакая прямая

отъ C ко угламъ полигона проведенная не выходитъ изъ сего полигона (ф. 27).

* *

О свойствахъ симетрическихъ полигоновъ какъ со впадшими такъ и съ вышедшими углами.

157. I. Ежели отъ каждаго угла симетрическаго полигона проведутся къ противнымъ угламъ діагонали, то явно окажется.

Iе. Два супротивныя треугольника у верьха и отъ двухъ ближнихъ діагоналей учиненныя между собою равныя; по сему (ф. 24. 30) треугольн: BGC = FGE. Ибо по свойству такихъ полигоновъ, FE равна есть и паралельна съ BC, уголъ BCG = GFE (48); а уголъ CBG = GEF; по сему (133) △ BGC = FGE: также рассуждается и о всѣхъ прочихъ треугольникахъ.

158. IIе. всѣ оныя діагонали между собою въ одной точкѣ пересекаются; ибо изъ составленныхъ ими треугольниковъ по два имѣютъ общей бокъ, и по тому общей верьхъ; отъ чего углы пресеченіемъ діагоналей учиненныя въ одной точкѣ сходятся.

159. IIIе. Всѣ оныя діагонали между собою по поламъ пересекаются; понеже всѣ супротив-

супротивчыя триугольники ими составленныя суть равныя.

160. II. Діагональ проведенной отъ одного угла къ противному раздѣляетъ полигонъ на двѣ равныя и подобныя фигуры; по тому что по обѣ стороны діагоналя имѣется одинакое число между собою равныхъ и единообразно лежащихъ триугольниковъ.

161. Точка пресеченія діагоналей, для равности радиусовъ къ супротивнымъ угламъ проведенныхъ, называется центръ симетрическаго полигона.

162. III. Какая нибудь линѣя IH (ф. 24. 30) чрезъ центръ G симетрическаго полигона прошедшая раздѣляетъ его на двѣ равныя и подобныя фигуры, и сама себя пополамъ; что доказывается также (157 и 160) по равности триугольниковъ EIG, HGE, или IGC, FGH. Отселѣ слѣдуетъ.

163. IV. Всякія двѣ прямыя чрезъ центръ симетрическаго полигона проведенныя пополамъ раздѣляются; токмо не во всякомъ симетрическомъ полигонѣ пресеченныя двѣ линѣи пополамъ чрезъ центръ проходятъ. Ибо буде въ полигонѣ ABCD (ф. 25), положа CE = BF провесть CF, EB, тогда оныя для равныхъ триугольниковъ GEC,

GFB (133) пополамъ пересекутся въ G а не въ центрѣ H полигона.

* *

О свойствахъ правильныхъ полигоновъ.

164. I. Около всякаго правильнаго полигона кругъ описать возможно, то есть окружность круга льзя провесть чрезъ всѣ концы угловъ такого полигона.

Доказ. Ежели онаго полигона всѣ или только два угла раздѣлить пополамъ линѣями, то пресеченїе оныхъ линѣй будетъ центръ того круга, какъ C (ф. 32). Ибо для равности сторонъ полигона и половинныхъ онаго угловъ, всѣ треугольники какъ ACB, BCD и проч. суть равныя (133); того ради AC = BC = DC и проч. будутъ радїусы круга; изъ сего явствуетъ

165. I с. Радїусы проведенныя отъ центра правильнаго полигона ко всѣмъ его угламъ раздѣляютъ оной на столько равнобедренныхъ и равныхъ треугольниковъ сколько у него есть сторонъ.

166. II с. Всякой уголъ при центрѣ правильнаго полигона равенъ квотусу числа 360° раздѣленнаго на число оныхъ угловъ

или

или сторонъ полигона. По сему бокъ десятиугольника есть хорда дуги 36° а бокъ шестиугольника есть хорда 60° и проч.

167. Ше. Правильнаго шестиугольника бокъ равенъ около его описаннаго круга радїусу; ибо (ф. 31) раздѣля оной отъ центра C на шесть триугольниковъ, то оныя для CA = CB, и угла ACB = 60° будутъ равнобочныя; по сему уголъ CAB = ABC = 60° (124); и тако CA = AB.

Примѣч. чрезъ сїе свойство правильнаго шестиугольника раздѣляемъ кругъ на градусы или на равныя части извѣстнаго числа; а имянно, положа радїусъ круга на окружность выдетъ дуга въ 60 град. раздѣля (98) оную пополамъ будетъ дуга въ 30 град. а сїю раздѣля пополамъ, найдется дуга 15ти град. остатокъ раздѣленїя въ градусы дѣлается уже размѣренїемъ; ибо дугу 15 град. на 3, 5, или 15 равныхъ частей правилами простой геометрїи вдругъ раздѣлить не возможно. Сїе болѣ утверждаетъ то, что сказано выше (42 и 124).

168. II. Всякой правильной полигонъ около круга описателенъ; то есть, можно въ такомъ полигонѣ написать кругъ, которой каждую его сторону въ срединѣ касаетъ.

Доказ. Ибо всякой правильной полигонъ раздѣляется на столько равнобедренныхъ и равныхъ триугольниковъ сколько у него сторонъ, то (69) проведенныя апо-

тѣмы на каждую сторону, раздѣляютъ ихъ на равныя прямоугольныя триугольники, а по сему и самыя апотемы будутъ равныя; того ради чрезъ ихъ концы проведенной кругъ коснетъ (84) средину каждой стороны полигона (зри ф. 32.).

169. III. Всякой правильной полигонъ имѣющей чотное число сторонъ есть полигонъ симетрической.

Доказ. Раздѣля полигонъ въ триуголыники отъ центра радїусами въ углы проведенными явно, что для равности сихъ треугольн. чотное число сторонъ дѣлится пополамъ отъ дїаметра AE (ф. 31) состоящаго изъ двухъ радїусовъ AC, CE. Ибо для равн. триуг. ABC, ECF, углы FEC, CAB суть равныя; по сему (50) стороны EF, AB суть паралельныя и равныя.

170. Пробл. I. Около даннаго правильнаго полигона кругъ описать.

Рѣш. Надлежитъ сыскать онаго центръ (164) и проч.

171. II. Въ данномъ правильномъ полигонѣ кругъ начертить.

Рѣш. Сыскавъ центръ полигона (164) опусти изъ онаго на одну сторону перпен-

перпендикуляръ, которой будетъ радiусъ круга (168).

172. III. Въ данномъ кругѣ какой нибудь правильной полигонъ начертить.

Общее рѣш. раздѣля 360 на число сторонъ того полигона, возми на данномъ кругѣ дугу равную сему квотусу, тогда хорда оной дуги будетъ сторона полигона (166), кою положа по окружности, получите написанной полигонъ въ кругѣ. Тоже помощiю транспортира удобнѣе дѣлается.

173 IV. Около даннаго круга какой нибудь правильной полигонъ написать (ф. 32).

Рѣш. раздѣля 360 на удвоенное число сторонъ того полигона, означь транспортиромъ (или чрезъ 167) квотусу равную дугу FG, а въ концѣ F проведеннаго радiуса CF воставь перпендикуляръ AF, которой съ продолженною CG соединится въ B. Положа FA = FB, будетъ линѣя AB бокъ желаемаго полигона. Потомъ ежели радiусомъ CB написать кругъ BAHED, и всю окружность раздѣлить хордою AB, тогда здѣлается около даннаго круга полигонъ BAHED.

Доказ. Ибо явно видно, что отъ сочиненiя здѣлаются равныя прямоугольныя треугольники

угольники въ двое болѣ числа сторонъ искоммаго полигона, коего равныя апотемы суть радіусы даннаго круга.

174. V. На данной линѣѣ АВ (ф.25). квадратъ начертить.

Рѣш. Сперва изъ точки А воставь перпенд. AD = AB (63); и послѣ разстворенїемъ цыркуля АВ изъ точки D, B означь дуги секущїяся въ C; до C проведи линѣи DC, BC; и тако здѣлаете желаемой квадратъ.

Доказ. проведя діагональ BD явствуетъ, что для равныхъ и равнобедренныхъ триугольниковъ BAD, BCD, уголъ прямой A = C; а углы BCA = BDC и ABD = DBC полупрямыя (132). Посему фигура ABCD равнобочная и прямоугольная то есть квадратъ. Равнымъ образомъ чертится и прямоугольникъ, токмо не равнымъ отворенїемъ цыркуля въ разсужденіи его сторонъ.

175 VI. На данной линѣѣ ED ф: 32.) правильной пятиугольникъ начертить.

Рѣш. Сыскавъ уголъ пятиугольника (153) положи по транспортиру половинѣ онаго равныя углы EDC, DEC и отъ точки C пресеченія линѣи EC, DC, разстояніемъ CD назначь кругъ; и по окружности онаго поло-

положа ED, здѣлается той пятиугольникъ. Доказательство явно отъ сочиненія.

Иначе, за неимѣніемъ угломѣра, тоже самое дѣлается по содержанію угла полигона къ прямому изъ Табл. (153). Въ пятиуголн. какъ 6 : 5; того ради изъ конца D данной линѣи (ф. 33) ED написавъ дугу EB, воставь перепен. DN. Потомъ раздѣля четверть окружности EN на 5 равныхъ частей положи шестую BN, и чрезъ точки E, D, B начерти кругъ (100); на конецъ по окружности положа BA, AF, равныя съ ED или съ DB здѣлается требуемой пятиугольникъ. А для семиугольника тажъ четверть окружности дѣлится на 7 частей, а на NB кладется три части и проч. Ибо 108 : 90 есть $\frac{108}{90} = \frac{6}{5}$. А уголъ семиугольника къ прямому какъ $\frac{200}{7} : \frac{20}{1} = \frac{10}{7} : \frac{1}{1}$ то есть 10 : 7.

176. VII. На данной линѣѢ AB (ф. 31.) шестиугольникъ написать.

Рѣш. Разстояніемъ цыркуля AB, изъ концовъ сея черты здѣлай пресеченія дугъ въ точкѣ C; изъ коей радіусомъ BC описанной кругъ, представитъ положеніемъ линѣи AB по окружности желаемой полигонъ. Сочиненіе явно отъ (167).

о свой-

* *

О СВОЙСТВАХЪ КРУГА.

177. I. Кругъ есть правильной полигонъ имѣющей несмѣтное число сторонъ безмѣрно малыхъ.

Доказ. Сїе явно изъ свойства кривыхъ линѣй (7). Чѣмъ болѣ правильной полигонъ въ кругѣ или около его написанной имѣетъ сторонъ тѣмъ ближе подходитъ къ соединенїю съ кругомъ: но понеже полигонъ имѣющей несчетность сторонъ и притомъ безконечно малыхъ неминуемо соединенъ есть съ кругомъ; того ради кругъ за такой полигонъ всегда полагать можно.

178. Пусть прямая AB (ф. 35.) продолженной дїаметръ BO, круга Bmn, вращаясь на неподвижномъ своемъ концѣ A, означитъ другимъ концомъ B перейдя все пространство того круга дуги Btx, Bsv; сїе положа можно сказать вообще.

179. II. Изъ всѣхъ линей состоящихъ между точки A и вогнутой окружности круга какъ AB, Ah, Ab, Am, Ai и проч. 1 е. проходящая чрезъ центръ C всехъ длиннѣе. 2 е. Чѣмъ далѣ отъ центра тѣмъ болѣ они коротеютъ, и по сему кои отъ него прошли

въ

вѣ равномѣ разстоянїи тѣ равныя. 3 е. Самыя кратчайшїя тангенсы Am, An. 4 е. Болѣ двухѣ между собою равныхѣ изѣ тѣхѣ линѣй не имѣется: а имянно только тѣ, кои вѣ равномѣ разстоянїи отѣ центра C по обѣ стороны проходятѣ.

НАПРОТИВУЖЕ ТОГО МОЖНО ЗАКЛЮЧИТЬ ВООБЩЕ.

180. III. Изѣ всѣхѣ линѣй содержимыхѣ между точки A и выпуклой части круга какѣ Am, Aa, AO, Ae, и проч. 1 е. Кратчайшая та, коя будучи продолжена чрезѣ центрѣ C проходитѣ. 2 е. Кои чѣмѣ отѣ него далѣ тѣмѣ длиннѣе, и потому находящїяся отѣ него вѣ равномѣ разстоянїи суть равныя. 3 е. Длиннѣе всѣхѣ касательныя Am, An. 4 е. Больше тамѣ двухѣ линѣй равныхѣ имѣть не можно.

Хотя всѣ сїе чувствительно обѣяснится описавѣ отѣ точки A радїусомѣ AO дугу pOq, однако можно то строжѣе доказать слѣдующимѣ образомѣ.

Отѣ центра C проведи радїусы ко всѣмѣ точкамѣ окружности, гдѣ тѣ линѣи кончились какѣ Cm, Cb, Ch, Ci, и проч.

Тогда

Тогда Аh (119 и 122) есть менѢ АС + Сh или АВ, по сему АВ всякой длиннѢе. При томЪ же треугольники АСh, АСb, имѢютЪ по двѢ стороны непремѢнной величины, а уголЪ АСh болѢ АСb; и тако Аh есть болѢ Аb и проч. (122). НаконецЪ ежели дуги Вh, Вi, то есть, буде линѢи Аh, Аi равно отстоятЪ, тогда для равныхЪ треугольниковЪ АСh, АСi (134) будутЪ равныя Аh, Аi, и проч.

ТакимЖе образомЪ можно доказать и предлож. II; по равности треугольниковЪ АСа, АСе, и проч.

181. Ежели на нѢкоей неподвижной точкѢ О (ф. 36.) взятой вЪ кругѢ Z внѢ центра С вращается прямая АВ, то оная окружностью пересечется вЪ неравныя части; и отЪ сюду слѢдуетЪ.

IV. ВсѢхЪ линѢй проходящихЪ отЪ точки О до окружности 1 е. Предлинная та, которая чрезЪ центрЪ проходитЪ какЪ, ОВ. 2 е. А сЪ оной прямолежащая какЪ ОА всехЪ короче. 3 е. Кои чемЪ далѢ отЪ центра тѢмЪ короче; и по тому равноудаленныя отЪ центра суть равныя, и больше тамЪ двухЪ равныхЪ между собою линѢй не имѢется

4 е.

4е. Двѣ равныя линѣи будучи продолжены здѣлаются двѣ равныя хорды; ибо равныя ихъ отъ цѣнтра разстоянія творятъ оныхъ продолженіи равными.

Хотя все сіе есть явновидно описавъ кругъ радіусомъ АО; однако можно тоже доказать прежнему подобнымъ доводомъ; проведя радіусы Ch, Ca, Cb, Ci и проч. тогда (119) Oi есть мене нежели OC+Ch или OB. Притомъ во всѣхъ триугольникахъ (въ коихъ по двѣ стороны непремѣнны то есть OC и радіусъ) чѣмъ уголъ у C шире тѣмъ и противной (122) ему бокъ больше другаго. Когда же дуги Bh, Bi равны, то для равныхъ триугольниковъ OCh, OCi (134) и линѣи Oh, Oi равныяжъ и проч.

182. Слѣдст. Ежели отъ точки взятой въ кругѣ проведутся до окружности три равныя линѣи, то оная точка будетъ цѣнтръ того круга.

183. V. Два равныя или неравныя круга только въ двухъ точкахъ пересекаются.

Доказ. Ежели кто въ томъ сумнѣваясь подумаетъ ихъ пресеченію быть въ трехъ точкахъ, тогда отъ цѣнтра одного круга проведя къ точкамъ пресеченія три радіуса, кои будутъ три равныя линѣи проведенныя не отъ цѣнтра другаго круга до его окружности, чему статься не льзя (179).

184. Слѣдст. I. Два круга имѣющія три общія точки, имѣютъ одинъ цѣнтръ и соединены.

185. II. Паралельныя круга имѣютъ одинъ цѣнтръ

и по тому называются соцентрическія. Два круга у которыхъ имѣется одна или двѣ общія точки, суть круги екцентрическія, то есть разныя цѣнтры имѣющія.

186. VI. Ежели двѣ хорды пересекутся въ кругѣ пополамъ, оныя пересекутся въ цѣнтрѣ, и будутъ діаметры (72).

187. VII. Буде два круга касаются, то прямая чрезъ цѣнтръ ихъ проведенная, перейдетъ чрезъ точку ихъ касанія.

Доказ. 1 с. Ежели внѣ касаются (ф. 35) тогда кратчайшій путь отъ цѣнтра А къ цѣнтру С, лежитъ чрезъ точку касанія О; ибо тогда оной равенъ суммѣ АО + ОС, а обходя О должно неминуемо перейтить кромѣ сихъ радіусовъ мѣсто между кругами содержимое. 2 с. Буде касаются внутри (ф. 36) тогда точка касанія А будетъ общая обоимъ кругамъ, и потому кратчайшей путь отъ цѣнтра О до окружности большаго круга Z (181) есть линѣя ОА, коя находится на одной линѣѣ съ цѣнтромъ С, и потому линѣя АО переходитъ точку касанія О.

* *

О содержаніяхъ и пропорціяхъ геометрическихъ.

Въ пятой части главы II Универс. Арифм. хотя между

между прочемъ числами основательно и доказаны свойства пропорцiи и прогрессiи для рѣшенiя принадлежащихъ къ тому задачь, а паче для произведенiя логарифмовъ чиселъ; но здѣсь за потребно разсудилось о свойствахъ содержанiй и пропорцiй еще общимъ Алгебраическимъ способомъ въ слѣдующихъ предложенiяхъ изъяснить.

188. I. Основательное предложенiе. Всякое Геометрическое содержанiе можно означать чрезъ сiю Генеральную то есть Алгебраическую формулу или образецъ, а къ aq или a : aq или сею b : bq и проч.

Доказ. Понеже квотусъ содержанiя, равенъ происходимой величинѣ отдѣленiя послѣдующаго члена на предъидущей; изъ сего явствуетъ; что сей послѣдующей то есть дѣлимое, должно быть равно произведенiю квотуса чрезъ предъидущей членъ яко дѣлителя: по сему всякое Геометр. содерж. котораго предъидущей членъ положенъ $= a$ квотусъ $= q$, имѣетъ послѣдующей $= aq$; а положа первой членъ $= b$, квотусъ $= q$, другой будетъ bq; и можно ихъ ставить такъ $a : aq$; $b : bq$ и проч.

189. Примѣч. Когда первой членъ содержанiя есть меньше втораго тогда квотусъ q будетъ больше единицы. Напримѣръ у содерж. $4 : 12$, $q = 3$, и тако

 первой

первой членъ $a = 4$, а другой будетъ $4 \times 3 = 12 = aq$; въ противномъ же случаѣ квотусъ всегда бываетъ дробное число меньше единицы какъ въ содерж. $12 : 4$, квотусъ $q = \frac{1}{3}$, по сему положа первой членъ $12 = a$, второй будетъ $12 \times \frac{1}{3} = 4 = aq$.

190. II. Всякую Геометрическую пропорцїю или сходствїе можно означать чрезъ сїю формулу $a : aq :: b : bq$.

Доказ. Ибо четыре количества двухъ равныхъ содержанїй, то есть, имѣющихъ тотъ же квотусъ въ строку поставленныя дѣлаютъ пропорцїю; но два содерж. имѣющїя квотусъ q изъявляются какъ $a : aq$ и $b : bq$ (188). Слѣдовательно сїе общее изображенїе $a : aq :: b : bq$ всякую Геометр. пропорцїю представляетъ.

191. III. Величина содержанїя (какъ и дробей) ни отъ умноженїя ни отъ дѣленїя его членовъ чрезъ какое либо количество не перемѣняется: или тоже самое произведенїя или квотусы двухъ неравныхъ величинъ чрезъ нѣкую одну суть въ равномъ содержанїи съ тѣми величинами.

Доказ. Понеже величина содержанїя зависитъ отъ своего квотуса; и тако

ежели

ежели содерж. $a : aq$ умножить какимъ нибудь количествомъ m, тогда у содержанія произведенія, $am : amq$ будетъ тотъ же квотусъ q, по сему $am : amq = a : aq$. Также доказать можно, что $a : aq :: \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$. И тако вообще $a : aq :: am : amq :: \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$ и проч.

192 Слѣдовательно цѣлыя величины суть въ томъ же содержаніи въ какомъ ихъ равныя части то есть половины, трети, четверти и проч. Напримѣръ $a : b :: \frac{a}{2} : \frac{b}{2} :: \frac{a}{3} : \frac{b}{3} :: \frac{a}{4} : \frac{b}{4}$ или положа дѣлителя $= p$, будетъ вообще $a : b :: \frac{a}{p} : \frac{b}{p}$ и проч.

193. IV. Удвоенное содержаніе какихъ нибудь двухъ содержаній равно содержанію квадратовъ. Утроенное изъ нѣкоторыхъ трехъ равно содержанію кубусовъ членовъ каждаго содержанія; и такъ далѣе прочихъ степеней.

Доказ. 1е. Пусть будутъ два равныя содерж. $a : aq$ и $b : bq$, изъ которыхъ удвоенное есть $ab : abqq$. Изъ сего явствуетъ, что $ab : abqq :: aa : aaqq :: bb : bbqq$, понеже все содержанія имѣютъ одинъ квотусъ qq. 2е. Да будутъ три равныя

 содержа-

содержанія $a:aq$, $b:bq$; $c:cq$, коихъ утроенное содерж. есть $abc:abcqqq$. Но также явствуетъ, что $abc:abcqqq::aaa:aaaqqq::bbb:bbbqqq::ccc:cccqqq$: ибо у всѣхъ оныхъ содержаніи имѣется тотъ же квотусъ qqq. Слѣдственно квадраты бываютъ всегда въ удвоенномъ содержаніи, а кубусы въ утроенномъ своихъ радиксовъ.

194. V. Всякой Геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Сіе изъ одного изображенія пропорціи $a:aq::b:bq$ явно видно есть, что $abq = abq$. По сему ежели пропорція состоитъ изъ разныхъ литеръ какъ $a:b::c:d$, то всегда будетъ $ab = de$. Слѣдов. въ непрерывной Геометрич. пропорціи $\div a \cdot aq \cdot aqq$ то есть $a:aq::aq:aqq$, произведеніе крайнихъ равно квадрату средняго члена; ибо $a \times aqq = aq \times aq = aaqq$.

195. Слѣдст. Іе. Всякая еквація или равность можетъ перемѣниться въ пропорцію, напримѣръ изъ $ad = bc$ слѣдуетъ $a:b::c:d$: ибо (194) $ad = bc$. Изъ $ad - bd = cq + c$ выдетъ $a - b : q + 1 :: c : d$. Изъ $1 - xx = a$ будетъ $1 - x : a :: 1 : 1 + x$ и проч.

196.

196. Vе. Четыре пропорцiональныя члена какъ a : b :: c : d можно поставить во многихъ иныхъ видахъ ненарушая ихъ прямой пропорцiональности. Ибо для двухъ произведенiй ad = bc, можно поставить a и d крайними а b и c средними; или b, c крайними но a, d средними въ осьми слѣдующихъ видахъ, a : b :: c : d. b : a :: d : c. c : a :: d : b. d : b :: c : a. a : c :: b : d. b : d :: a : c. c : d :: a : b. d : c :: b : a и проч. смотри въ универс. Арифмет. стран. 356.

197. VI. Когда двѣ или многiя пропорцiи взаимно умножить или раздѣлить, то произведенiй или квотусы будутъ также пропорцiональныя.

Доказ. 1е. Ежели умножить первой членъ первымъ, а второй вторымъ двухъ неравныхъ пропорцiй a : aq :: b : bq, c : cp :: d : dp, тогда явно, что ихъ произведенiя, ac : acpq :: bd : bdpq суть пропорцiональны: ибо въ оныхъ есть тотъ же квотусъ pq.

2е. Также по раздѣленiи a : aq :: b : bq чрезъ c : cp :: d : dp, неминуемо будетъ $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cp} :: \frac{b}{d} : \frac{bq}{dp}$; по тому что оныя содержанiя имѣютъ одинъ квотусъ $\frac{q}{p}$.

198. Слѣдст. Пропорціональныхъ величинъ какъ степени, такъ и радиксы между собою пропорціональныя. Ежели $a : aq = b : bq$; то будетъ $aa : aaqq = bb : bbdd$: ибо (194) $aabbqq = aabbqq$ и проч.

199. VII. Естьли многія величины суть пропорціональны, то будетъ сумма первыхъ къ суммѣ вторыхъ, какъ одинъ предъидущей или первой какой нибудь членъ къ своему послѣдующему или второму члену.

Доказ. Когда есть $a : aq :: b : bq :: c : cq :: d : dq$, говорю, что $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq$, какъ напримѣръ $b : bq$; ибо послѣдующей перваго содержанія $aq + bq + cq + dq$ есть тожъ что $a + b + c + d \times q$: слѣдовательно (190) $a + b + c + d : a + b + c + d \times q :: b : b \times q$.

200. VIII. Ежели случатся двѣ или многія равныя пропорціи, или которыхъ первыя либо вторыя члены суть въ пропорціи, то таковыхъ пропорцій суммы или разности будутъ пропорціональны.

Доказ 1е. Изъ представленныхъ двухъ пропорцій $a : aq :: b : bq$ и $c : cp :: d : dp$ выдетъ $a + c : aq + cp :: b + d : bq + dp$. Ибо изъ оной есть (194) $abq + adp + bcq + cdp =$

abq

$abq + adq + bcp + cdp$, уничтожа въ сей еквацїи равныя количества, останется $adp + bcq = adq + bcp$. Изъ сего явствуетъ, ежели $p = q$ то есть буде пропорцїи равныя, то сїя есть истинная еквацїя; ибо оная можетъ привестись въ равность $adp + bcp = adp + bcp$.

2 е. А когда тѣ пропорцїи неравныя то есть p неравно q, но въ оныхъ $a : b :: c : d$, и по сему $ad = bc$, тогда изъ еквацїи $adp + bcq = adq + bcp$ выдетъ $adp + adq = adq + adp$: отъ сего явствуетъ, что $a + c : aq + cp :: b + d : bq + dp$. Буде же $aq : bq :: cp : dp$, тогда въ семъ послѣднемъ случаѣ есть $adpq = bcpq$, изъ чего по приведенїи или уничтожа одинакой множитель pq выдетъ тоже $ad = bc$. Равнымъ образомъ и пропорцїональность разностей предложенныхъ пропорцїй доказать можно.

* *

О нѣкоторой пропорцїональности линѣй.

201. I. Ежели къ линѣѣ AC (ф. 38), раздѣленной въ B по крайнему и среднему содержанїю то есть ÷ AC, BC, AB приложить

ложить большую $BC = CD$; то будетъ $\div AD \cdot AC \cdot CD$ или $AD : AC :: AC : CD$.

Доказ. Пусть $AC = a$, CB или $CD = y$; выдетъ $a - y = AB$, $AD = a + y$. По сему слѣдуетъ доказать $\div a + y . a . y$.

По силѣ предлож. $a \cdot y = y \cdot a - y$; перемѣня будетъ $y \cdot a = a - y \cdot y$; сложа выдетъ $y + a \cdot a = a - y + y \cdot y$: но $a - y + y = a$. И тако $y + a \cdot a = a \cdot y$ то есть $\div y + a \cdot a \cdot y$.

202. II. Буде отъ AC (ф. 39) отнять $CD = AB$; то остатокъ AD раздѣлится въ B опять въ средн. и крайн. содержанїи. $\div AD \cdot AB \cdot BD$; или положа $AB = y$, $BC = x$, $BD = x - y$, $AC = x + y$, будетъ $\div x - y \cdot y \cdot x$.

Доказ. По заданїю $y \cdot x = x \cdot y + x$, перемѣня выдетъ $x \cdot y = y + x \cdot x$, раздѣля будетъ $x - y \cdot y = y + x - x \cdot x$; но $x - x = o$, по сему $x - y \cdot y = y \cdot x$, и тако $\div x - y \cdot y \cdot x$.

203. III. Когда линѣя AC (ф. 38) раздѣлена въ B такъ $\div AC \cdot BC \cdot AB$, то будетъ $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 3\,\overline{BC}^2$.

Доказ. Положа $AC = z$, $BC = a$, $AB = c$; $AC = z = a + c$, и по сему надобно доказать, что $zz + cc = 3\,aa$.

Понеже

Понеже $zz = aa + 2ac + cc$, а съ cc будетъ $aa + 2ac + 2cc = 3aa$. Но $ac + cc = zc$ и $zc = aa$; по сему $ac + cc = aa$ переставя въ ту равность $2aa$ на мѣсто $2ac + 2cc$ будетъ $xx + cc = 3aa$.

204. IV. Буде притомъ линѣю AC раздѣлить пополамъ въ E, то будетъ $\overline{AC + AE}^2 = 5\,\overline{AE}^2$; или положа $AC = 2a$, $BC = b$; будетъ $AE = a$, и $\overline{a + b}^2$ то есть $aa + 2ab + bb = 5aa$, но отнявъ aa останется $2ab + bb = 4aa$.

Доказ. Ибо $\div AC \cdot BC \cdot AB$, то есть $2a . b = b . 2a - b$; по сему $bb = 4aa - 2ab$, переставя $-2ab$ выдетъ $2ab + bb = 4aa$.

205. V. Какихъ нибудь линѣй AB, EF (ф. 40) раздѣленныхъ въ крайн. и средн. содержанїи части между собою пропорцїональны, то есть, $AC : CB :: EG : GF$.

Доказ. Положа $AB = z$, $AC = a$, $EF = x$, $EG = b$ будетъ (204) $\overline{\frac{1}{2}z + a}^2 = 5\,\frac{1}{2}zz$, и $\overline{\frac{1}{2}x + b}^2 = 5\,\frac{1}{2}xx$: но сїи квадраты для общаго квотуса 5 суть пропорцїональны, по сему и радиксы оныхъ $\frac{1}{2}z + a : \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x +$

b

$b : \frac{1}{2} x$; раздѣля содержанія выдетъ $a : \frac{1}{2} z = b : \frac{1}{2} x$, удвоя послѣдующія есть $a \cdot z = b \cdot x$; перемѣня будетъ $z \cdot a = x \cdot b$; вычтя выдетъ $z - a \cdot b = x - b \cdot b$ или $a \cdot z - a = b \cdot x - b$ то есть $AC \cdot CB = EG \cdot GF$. А какъ данную линѣю въ крайнемъ и среднемъ содержаніи раздѣлить показано ниже ( ).

* *

О пропорціональныхъ линѣяхъ.

206. Ежели стороны AB, AC нѣкоего угла A (ф. 41) пересечь коликимъ нибудь числомъ равноотстоящихъ между собою паралельллей какъ DH, EI, FK и проч. тогда 1 с. всѣ части AH, HI и проч. линѣи AC, также и части AD, DE и проч. линѣи AB, будутъ между собою равныя; ибо ежели отъ каждой точки пресеченія линѣи AB, AC паралельми, опустить перпендикуляры AO, DM, EN и проч. AO, HP, IQ и проч. то для ихъ равности и угловъ ADO, DEM, EFN и пр. AHO, HIP, IKQ и пр. (133) прямоугол. триугол. ADO, DEM, EFN и пр. также AOH, HPI, IQK и пр. суть между собою равныя, Слѣдов. ипотенузы AD, DE, EF, и пр. также AH, HI, IK и пр. между собою равныя.

2 с.

2е. Какое нибудь число частей линѣи АС, кѣ шакомужѣ числу частей линѣи АВ между тѣхѣ же параллелей содержимыхѣ, такѣ иное какое ни есть число частей вѣ АС, кѣ числу частей АВ между тѣхѣ же параллелей включенныхѣ. Ибо отѣ равности ипотенузѣ, AD : DE :: AH : HI по тому что вѣ обоихѣ содерж. квотусѣ есть I. Но (196) AD : AH :: DE : HI; также DE : EF :: HI : IK или DE : HI :: EF : IK. По сему AD : AH :: DE : HI :: EF : IK :: FB : KC. Слѣдов. (199) сумма всѣхѣ предъидущ. АВ кѣ суммѣ всѣхѣ послѣдующ. АС какѣ AD : AH, или иная нѣкая часть линѣи АВ кѣ соотвѣтствующей части вѣ АС или (192) сколько нибудь частей вѣ АВ, кѣ равному числу частей вѣ АС. Но какѣ сіе число частей состоитѣ между двухѣ параллелей; того ради какое нибудь число частей вѣ АС кѣ томужѣ числу частей вѣ АВ, какѣ иное какое либо число частей вѣ АС, кѣ такомужѣ числу частей вѣ АВ. Иначе,

Ежели АН есть десятая часть линѣи АС, то и AD будетѣ также десятая часть линѣи АВ, или вообще, двѣ какія нибудь части взятыя между двухѣ параллелей напримѣрѣ DF, HK можно признавать за два произведенія двухѣ равныхѣ чиселѣ,

одно

одно умноженное чрезъ AD; а другое чрезъ AH; но произведенія двухъ равныхъ числъ неравными суть пропорціональны (191) симъ неравнымъ количествамъ; того ради какое нибудь число частей въ AC къ такомужъ числу частей въ AB, какъ AH къ AD; или какъ иное какое либо число частей линѣи AC къ равному числу частей линѣи AB. Изъ сего положенія слѣдуетъ основательное предложеніе.

207. I. Подобныя треугольники имѣютъ всѣ сходственныя стороны между собою пропорціональныя.

Доказ. Понеже △ DEF (ф. 20) на подобной себѣ BCA положенной (136) имѣютъ третьи стороны какъ AC, ef паралельныя; и (206) будетъ BA : BC :: Be : Bf то есть AB : BC :: DE : DF или перемѣня какъ AB : DE :: BC : DF.

Ежели положить уголъ E на равной ему A, то линѣи DF, BC будутъ паралельныя, и по сему AB : ED :: AC : EF. А положа уголъ F на C, будетъ AC : EF :: BC : DF.

Примѣч. Притомъ же явно (206), что и Ae, Cf пропорц. бокамъ BA, BC; или Ae : Cf :: BA : BC :: DE : DF :: Be : Bf.

208.

208. Слѣдст. Вѣ Δ обратно паралельная линѣя основанѣю называемая Антипаралель, какѣ BC вѣ Δ FGA, раздѣляетѣ стороны FA, GA вѣ обратной пропорцѣи то есть FA : AG :: AC : AB (ф. 48.)

209. II. Два треугольника имѣющѣя всѣ сходственныя стороны пропорцѣональныя суть равноугольныя и подобныя.

Доказ. Ежели (ф. 20) AC : BC :: EF : DF, и AC : AB :: EF : ED, говорю что треугольники ABC, DEF равноугольныя; ибо ежели на линѣѣ DF здѣлается Δ DFG равноугольной сѣ Δ ABC, учиня уголѣ FDG = B, уголѣ F = C, то будетѣ (207) AC : BC :: FG : FD; но AC : BC :: EF : FD, попложенѣю, и такѣ отѣ равности содержанѣй EF : FD :: FG : DF, слѣдуетѣ EF = FG. Также докажется, что и DG = DE; и посему треугольники DFG, BDE имѣючи равныя стороны между собою равныя (132) Но по сочиненѣю треугольникѣ DFG равноугольной сѣ ABC, того ради сѣ онымѣ и Δ DEF также равноугольныя.

210. III. Два треугольника имѣющѣя двѣ сходственныя стороны около равнаго угла пропорцѣональныя, суть равноугольныя.

Доказ.

Доказ. Ежели въ треугольникахъ ABC, DEF (ф. 20) уголъ D = B; и DE : DF :: AB : BC тогда онѣ равноуг. Взявъ на AB часть Be = DE проведи ef паралельно къ AC то треугол. Bfe BCA будутъ равноуг. ибо для паралельныхъ ef, CA уголъ e = A, уголъ f = C а уголъ B есть общей; и тако (206) Be : Bf :: AB : BC; а положено DE : DF :: BA : BC. Посему Be : Bf = DE : DF; но Be = DE, то и Bf = DF сего ради треугольники Bef, DEF равныя и подобныя; а понеже Bef подобной съ ABC по тому и △ DEF подобной съ △ ABC.

211. IV. Линѣя AD разсекающая по поламъ уголъ BAC (ф. 41) раздѣляетъ противной ему бокъ BC на части BD, DC пропорцiональныя бокамъ BA, AC то есть, BD : DC = AB : AC (при томъ разность произведенiй AB × AC, BD × DC равна всегда квадрату AD).

Доказ. Чрезъ B проведи къ AD паралель BE коя съ продолженною AC сойдется въ E тогда треугольники BCE, DAC будутъ (141) подобныя; и (206) BD : DC :: EA : AC. Но для паралельныхъ, уголъ E = DAC = DAB = ABE; и тако (125) △ BAE;

BAE, есть равнобедр: и AE = AB; по сему BD : DC :: EA или BA : AC.

212. V. Буде въ △ прямоугольномъ CEL, провесть (ф. 43) изъ прямаго угла E перпенд. EO; тогда. 1 е. Оной раздѣлитъ △ CEL на два триугол: COE, OEL между собою и цѣлому CEL подобныя. 2 е. Онъ же будетъ средняя пропорціональная черта между частьми CO, OL ипотенузы CL. 3 е. Каждой бокъ △ CEL будетъ средней пропорціональной между ипотенузою и ея частью тому боку подлежащею.

Доказ. Ибо явно что изъ триугольниковъ COE, OEL каждой подобенъ триугольнику CEL: по тому что кромѣ прямыхъ угловъ у каждаго есть общей уголъ съ триугольникомъ CEL, и для того они между собою подобныя; слѣдовательно въ △ CEO, меньшей бокъ CO къ среднему EO, какъ въ △ EOL малой бокъ EO къ среднему LO, или ÷ CO · EO · LO, то есть CO : EO :: EO : LO.

Въ △ CEO, малой бокъ CO къ своей ипотенузѣ EC, какъ въ △ CEL малой бокъ EC къ ипотенузѣ LC; или ÷ CO · CE · CL.

Въ △ EOL средней бокъ LO къ своей ипотенузѣ EL, какъ въ △ CEL средней

 бокъ

бокъ EL къ ипотенузѣ LC; или ∺ LO, LE · LC.

213. Слѣдст. I. Въ прямоугольномъ △ сумма квадратовъ двухъ сторонъ равна квадрату ипотенузы. Ибо ∺ CO · CE · CL, по сему (194) CE□ = CO × CL. Притомъ ∺ OL · LE CL, и тако LE□ = OL × CL; сего ради CE□ + LE□ = CO × CL + OL × CL = (CO + OL) × CL = CL × CL = CL□.

214. II. Понеже CE□ + LE□ = CL□, и тако CE□ = CL□ − LE□, и LE□ = CL□ − CE□; то есть, ежели квадратъ одной стороны вычесть изъ квадрата ипотенузы останется квадратъ другой стороны.

215. III. Дїагональ квадрата точно измѣрить ни вычислить ни какъ невозможно.

Доказ. Пусть AB или AD (ф. 25) = a; по сему (213) BD□ = aa + aa или 2 aa = BD□. Но aa : BD□ :: 1 : 2; слѣдоват. дїагональ по степени измѣримой; но 2 есть не квадратное число, того ради величину дїагоналя невозможно точно вычислить, и по тому онъ не измѣримой.

216. VI. Перпендикуляръ EO (ф. 43) отъ окружности круга на дїаметръ CL опущенный есть средней пропорц. между

частъ-

частьми CO, OL; или тоже, квадратъ онаго равенъ произведенїю $CO \times OL$.

Доказ. Ибо проведя линѣи EC, EL будетъ (89) △ CEL въ E прямоугольной, и по тому (212) ÷ CO · EO · OL или EO□ = $CO \times OL$ (194).

217. IV. Ежели дїаметръ CL раздѣлить на сколько нибудь равныхъ частей въ примѣръ на 5, потомъ положа $CO = \frac{1}{5}$ CL, и воставя перпенд. провесть EC, тогда будетъ CE□ = 5 CO□. Ибо LO = 4 CO; но 4 $CO \times CO$ = 4 CO□ = EO□ (216), а (213) съ OC□ выдетъ EC□ = 5 CO□.

218. VII. Квадратъ бока равнобоч. △ ACB (ф. 44) въ трое больше квадрата радїуса круга около онаго △ описаннаго.

Доказ. Опустя перпенд. CE проведи хорду BE, коя (167) будетъ равна радїусу BO или AO, и тако CE = 2 BE. По сему CE□ или 4 BE□ — BE□ = 3 BE□ = CB□ (214). Слѣдоват. CE квадратъ дїаметра къ квадрату бока равнобочнаго триугольника какъ 4 : 3. Притомъ же явно что радїусъ AO или EO въ двое болѣ Апотемы DO.

219. VIII. Части двухъ хордъ BA, CD (ф. 45) въ кругѣ пересѣченныхъ, суть

 обратно

обратно пропорцїональныя.

Доказ. Проведя DA, CB явствуетъ, что треугольники BEC, DAE суть подобныя; ибо углы при E равныя, а уголъ C съ угломъ A стоятъ на одной дугѣ BD, и углы B, D стоятъ также на одной дугѣ AC. По сему (207) AE:DE::CE:BE.

220. Примѣч. Хорды въ одномъ кругѣ не могутъ быть пропорцїональны своимъ дугамъ; ибо положимъ напримѣръ дуга CE есть треть дуги LE, тогда хорда CE не будетъ въ трое меньше хорды LE, потому что дуга CE+EL=CEL, но хорда CE+EL есть больше хорды CL (119).

221. IX. Двухъ линѣй EB, EC (ф. 46) изъ точки взятой внѣ круга до вогнутой окружности проведенныхъ, внѣшнїя части AE, DE имѣются обратно пропорцїональныя цѣлымъ линѣямъ EB, EC, то есть AE:DE::CE:BE; и AE×BE=DE×CE.

Доказ. Проведя хорды AC, DB, явно, что треугольники EBD, EAC подобныя: ибо имѣютъ уголъ E общей, а углы B, C стоятъ на одной дугѣ AD, и тако (207) AE:DE::CE:BE.

222. X. Ежели изъ двухъ линѣй EB, Ed (ф. 46)

(ф. 46) отъ внѣшней точки E проведенныхъ, одна EB внутрь, а другая Ed тангенсъ, тогда сія касателная будетъ средн. пропорціонал. между цѣлой линѣи EB и ея внѣшней части EA, или ÷ EB. Ed. EA.

Доказ. Проведя dB, dA, треугольники EdB, EdA будутъ подобныя; ибо уголъ E общей, а угла EBd = AdE есть мѣра полдуги Ad (86 и 87), и такъ уголъ EdA = EdB; а по тому (207) EB : Ed :: Ed EA. или ÷ EB. Ed. EA.

223. XI. Части двухъ линѣй пересѣченныхъ между двухъ паралельныхъ линѣй между собою пропорціональныя.

Доказ. Понеже треугольники ABE, CED (ф 47) подобныя, ибо (40) углы у E равныя, и (48) уголъ EAB = EDC, также уголъ EBA = ECD. Посему (207) EA : ED :: BE : EC.

224. XII. Ежели изъ точки A (ф. 48) въ окружности взятой проведутся какія нибудь линѣи AF, AG, то отъ той же точки A въ равномъ растояніи проведенная линѣя ED пересѣчетъ ихъ въ обратной пропорціи, то есть AF : AG :: AC : AB. А притомъ AF × AB или AG × AC = EA□.

 Доказ.

Доказ. Ибо 1 е. Угла ABC есть (94) мѣра $\frac{1}{2}$ дуги FE + $\frac{1}{2}$ дуги DA или $\frac{1}{2}$ дуги AE, то есть полдуги FEA, а оная $\frac{1}{2}$ дуги также мѣра углу G, и потому уголъ ABC = G, а уголъ A общей, и такъ триугол. FGA, BCA суть подоб. того ради (207) AF : AG :: AC : AB.

2 е. Понеже углу FBD есть мѣра $\frac{1}{2}$ FD + $\frac{1}{2}$ EA или + $\frac{1}{2}$ AD, то есть полдуги FDA, которая также мѣра углу FEA; но уголъ EAF общей, и потому въ подобныхъ триугольникахъ BEA, FEA будетъ AF : AE :: EA : BA, то есть ÷÷ FA · EA · BA.

225. XIII. Всякаго четыреугольника въ кругѣ написаннаго произведенїе дїагоналей равно суммѣ двухъ произведенїй противныхъ сторонъ: то есть (въ ф. 49.) AC × BD = AB × CD + AD × BC.

Доказ. Здѣлавъ уголъ ABE = DBC, будетъ уголъ ABD = EBC, и (90) уголъ ADB = ACB; по сему въ подоб. (207) триуг. BDA, BCE, есть BD : AD :: BC : CE, и (194) BD × CE = AD × BC. Но уголъ ABE = DBC, а уголъ BAC = BDC (90), и такъ въ подоб. триуг. BDC, BAE есть BD : CD :: AB : AE, и BD × AE = CD × AB; но BD × AE + BD × CE = BD × AC, по тому что AE

+ CE

$+ CE = AC$, того ради $BD \times AC = CD \times AB + AD \times BC$.

226. XIV. Ежели прямоугольнаго $\triangle ABC$ (ф. 50) раздѣлить одинъ уголъ какъ A на нѣсколько равныхъ частей; тогда части бока BC всегда по мѣрѣ разширѣнія угла A увеличиваются.

Доказ. Ибо для равныхъ угловъ при B (211) $AB : AE :: BD : DE$; но AE длиннѣе (121) есть AB; чрезъ то и DE больше нежели BD. По томъ $AD : AC :: DE : EC$, но AC длиннѣе AD (121); по сему DE короче противъ CE и проч.

227. XV. Во всякомъ $\triangle BAC$ (ф. 22), ежели отъ верьха A опустить перпендикуляръ AD, тогда квадратъ одного бока съ квадратомъ основанія превышаютъ квадрата другаго бока двойнымъ произведеніемъ основанія умноженнаго его частью подлежащею другому боку: то есть $AB\square = AC\square + BC\square - 2\,BC \times CD$.

Доказ. Понеже (214) $AC\square - CD\square = AD\square$, а $AD\square + BD\square = AB\square$. Но $BD = BC - CD$, по сему $BD\square = BC\square - 2\,BC \times CD + CD\square$; поставя на мѣсто $AD\square$ и $BD\square$ равныя имъ величины выдетъ $AB\square = AC\square - CD\square +$

BC□ — 2 BC × CD + CD□; но — CD□ + CD□ = 0, и тако AB□ = AC□ + BC□ — 2 BC × CD.

228. XVI. Во всякомъ наклонномъ треугольникѣ квадратъ большаго бока превышаетъ сумму квадратовъ другихъ двухъ сторонъ двойнымъ умноженїемъ бока, на которой опустится перпендикуляръ продолженною частью того бока до перпендикуляра: то есть AB□ = BC□ + AC□ + 2 BC × CD (ф. 20).

Доказ. Ибо (213) AB□ = BD□ + AD□ и AC□ = CD□ + AD□; но BD□ = BC□ + 2 BC × CD + CD□; переставя сїе вмѣсто BD□ а AC□ на мѣсто AD□ + CD□, будетъ AB□ = BC□ + AC□ + 2 BC × CD.

229. Примѣч. 1 е. Въ △ ABC (ф. 51) ежели малымъ бокомъ AB описать полкруга, тогда CE = AB + BC а CF = BC — AB; по сему (221) AC : AB + BC :: BC — AB : CI; то есть основанїе къ суммѣ двухъ боковъ, такъ ихъ разность къ разности частей основанїя отъ перпенд. учиненныхъ. 2 е. буде перпенд. какъ CD падетъ внѣ △ тогда начертя бокомъ EC полкруга будетъ AH = AC + EC, а KA = AC — EC, по сему AB : KA :: AH : AG.

230. Слѣдоват. Когда въ не равносто-

ронномъ

ронномъ триугольникѣ даны мѣрою всѣ три стороны, то (чрезъ 229 или 227 и 228) сыскавъ части основанія найдется (214) высота $\triangle$ и проч.

231. XVII. Въ равнобедр. $\triangle$ DAB, (ф. 52) коего углы при основаніи DA въ двое больше верьхняго B, линѣя DC раздѣляющая уголъ D пополамъ пересѣчетъ бокъ AB въ C по крайнему и среднему содержанію: то есть $\div$ AB. BC. CA.

Доказ. Отъ сочиненія уголъ B = BDC, по сему (125) DC = BC; а понеже уголъ ACD = CDB + B, то есть = $\angle$ ADB или A, по тому AD = DC. И тако два равнобедр. триугольника DAB, ACD имѣющія общей уголъ A суть равноугольныя; того ради AB къ AD, то есть къ DC или къ BC, какъ DC или BC къ AC; по сему $\div$ AB. BC. AC.

232. Слѣдст. Ежели радіусомъ AB написать кругъ, тогда AD или BC будетъ бокъ дѣсятиугольн. въ ономъ, и тогда уголъ B = $\frac{360}{10}$ = 36, по тому что сей уголъ въ такомъ $\triangle = \frac{180}{5}$ = 36. Равно и AC есть бокъ дѣсятиугольника въ кругѣ радіусомъ AD написанномъ.

233. XVIII. Вѣ правильномѣ пятиуголь-никѣ (ф. 53) буде провесть дїагонали AD, AC, то △ ADC будетѣ равнобедр. и онаго углы при основанїи вѣ двое болѣ верьхняго DAC.

Доказ. Понеже AD, AC суть хорды равныхѣ дугѣ, по тому △ ADC равнобедр. Но ∠ DAC мѣра полдуги DC, а ∠ CDA мѣра полдуги ABC или дуга AB = BC = CD. Слѣдов. ∠ D или C двойной есть ∠ A.

234. XIX Вѣ правильномѣ пятиугольникѣ (ф. 53) проведенныя дїагонали AC, DB, пересѣкаются вѣ точкѣ F вѣ крайнемѣ и среднемѣ содержанїи, и AF или DF равна будетѣ боку сего политона.

Доказ. Ибо ∠ DCA = DFC, по тому что оныхѣ мѣра есть половина дуги AED = полсуммѣ дугѣ AB, DC (94), того ради DC = DF, также и AF = AB = DC. По томѣ вѣ подобныхѣ △ DCB, CBF для общаго ∠ B и равныхѣ FCB, CDB слѣдуетѣ DB : BC = BC : BF; но BC = DC = DF, и по сему DB : DF = DF : FB или ∺ DB · DF · FB.

235. XX. Квадратѣ бока CH (ф. 54) пятиугольника равенѣ суммѣ квадратовѣ бока CB или BH десятиугольника и FH шестиугольника.

Доказ.

Доказ. Въ половину BH проведи линѣю FD, коя будетъ къ BH (70) перпендикулярна. Но треугольники CHF, CEF подобныя, ибо уголъ C общей, а уголъ CFD $=$ FHC 54̆ по тому что дуги CB $+$ BD $=$ $36 + 18 = 54$̆ мѣра углу CFD, а уголъ FHC половина угла сего полигона, то есть 54̆, сего ради $CH : FC = FC : CE$, и $CH \times CE = FC□$. Но понеже равнобедр. треугольники CHB, BEH имѣя общей $\angle$ CHB также подобныя, и будетъ $EH : BH = BH : CH$, и $EH \times CH = BH□$. И тако $BH□ + FC□ = CH \times CE + EH \times CH$; но $CE + EH = CH$, по сему $FC□ + BH□ = CH□$.

236. XXI. Квадратъ бока пятиугольника DC съ квадратомъ дїагоналя AD, въ пятеро больше квадрата радїуса AO. (ф. 53).

Доказ. Проведя дїаметръ AK и DK бокъ 10 треугольника, положи $DC = a$, $AD = d$, $AK = 2x$, и $DK = y$. По сему въ прямоуг. $\triangle$ ADK будетъ (213) $dd + yy = 4xx$ но (235) $aa = xx + yy$. Сложа сїю равность съ первою будетъ $dd + yy + aa = xx + yy + 4xx$; отнявъ отъ обоихъ yy выдетъ $dd + aa = 5xx$, то есть $AD□ + DC□ = 5AO□$.

237.

237. XXII. Ежели въ кругѣ провесть дїаметръ AH (ф. 55), и на оной изъ цѣнтра поставить прямостоящую KF, а изъ средины L радїуса здѣлать LN = LK, тогда линѣя NK будетъ бокъ пятиугольника а FN, десятиугольника, начертаемыхъ въ ономъ кругѣ.

Доказ. Положа AF = 2a, FN = x, будетъ LN или LK = a + x, потому $LK\square$ = aa + 2ax + xx; но $LK\square = LF\square + FK\square$ = aa + 4aa = aa + 2ax + xx; отнявъ изъ равности по aa, останется 4aa = 2ax + xx; расположа въ пропорцїю будетъ 2a + x : 2a = 2a : x, и x (2a + x) = 4aa, но 2a + x = AN; по сему выдетъ AN : AF = AF. FN, или ÷ AN. AF. FN. И тако линѣя AN раздѣлена въ такомъ содержанїи, что AF есть (167) бокъ шестиугольника, и FN (232) бокъ десятиугольника; а понеже $FN\square + FK\square = KN\square$, того ради (235) линѣя KN есть сторона правильнаго пятиугольника.

238. Пробл. I. Данную линѣю AB на сколько нибудь равныхъ частей раздѣлить, напримѣръ на 5 (ф. 56).

Рѣш. Начерьти линѣю CE, и положа на оной въ разсужденїи величины AB отъ C пять

равныхъ

равныхъ частей, здѣлай на линѣѣ CD равнобочной триугольн. CDF; потомъ взявъ линѣю AB положи отъ F до a и b, и проведи ab: напослѣдокъ назначенныя 4 линѣи F 4, F 3, F 2, F 1, раздѣлятъ линѣю $ab =$ AB на 5 равныхъ же частей. Ибо отъ сочиненія △ abF также равноугольной, и по тому (207) CD или CF : C1 :: Fa или ab : a1, но $C1 = \frac{1}{5}$ CD, то и $a1 = \frac{1}{5}$ ab. Подобно CD : C2 :: ab : a2, отъ чего $a2 = \frac{2}{5}$ ab и проч. Иначе, учиня какія нибудь обоюду линѣи AB равныя углы BAC, AbD и проч. какъ явствуетъ въ ф. 57.

239. II Данную линѣю AC въ равномъ содержаніи съ линѣею AB раздѣлить (ф. 58).

Рѣш. Здѣлавъ изъ данныхъ линѣй какой нибудь уголъ BAC, соедини CB, потомъ чрезъ всѣ точки D, E, F, раздѣленія линѣи AB проведи паралельныя къ BC; тогда для подобныхъ триугольниковъ ABC, ADd и проч. (206) всѣ части линѣи AC будутъ пропорціональны частямъ линѣи AB.

Сіе чрезъ первую проблему способнѣе рѣшить можно.

240. III. Даннымъ тремъ линѣямъ a, b, c, (ф. 58) четвертую пропорціональную сыскать.

Рѣш.

рѣш. Проведи двѣ линѣи AB, AC сѣкущїяся подъ какимъ нибудь угломъ въ A, потомъ отъ точки A положа на нихъ AF = a, Af = b, AE = c чрезъ концы F, f первыхъ двухъ проведи Ff, а чрезъ конецъ E третьей линѣи проведи Ee паралельно къ Ff, и будетъ (206) Ae искомая линѣя.

241. IV. Между двухъ данныхъ линѣй CO, OL (ф. 43) среднюю пропорцїональную сыскать.

рѣш. Положа данныя линѣи CO, OL на прямой чертѣ, изъ средины оныхъ F начерьти полкруга CEL, а изъ точки O поставь перпенд. OE, которой (216) будетъ средн. пропорц. между данныхъ.

Иначе, положа (ф 59) AC = CO, CB = LO на одной прямой, продолжи AB, чтобъ BD = AC. Изъ D и A разстоянїемъ AB или CD здѣлай пересѣчку дугъ въ E, тогда линѣя CE или BE будетъ средняя искомая. Ибо отъ сочиненїя равнобедр. △ ABE, CBE имѣющїя общей ∠ B, суть равноугольныя, и тако (207) AC : BE :: BE : CB.

242. V. Даннымъ двумъ линѣямъ третью пропорцїональную сыскать, то есть такую, чтобъ вторая была средн. пропорц.

между

между искомой и первой.

Рѣшенїе сего есть тоже самое (240), полагая только вторую дважды, какъ вмѣсто AE, Af, а первую за AF.

243. VI. Данную линѣю на двѣ такїе части раздѣлить, чтобъ большая была средн. пропорц. между цѣлой и меньшей части.

Рѣш. Въ концѣ данной линѣи AB (ф. 60) воставь перпендикуляръ $AE = \frac{1}{2} AB$, а изъ точки E радїусомъ AE начертя кругъ проведи линѣю BEF: потомъ здѣлай $BC = BD$. И тако линѣя AB раздѣлится въ C по силѣ заданїя.

Доказ. Для касательной AB, будетъ (222) $BF : BA :: BA : BD$, или $BF - BA : BA :: BA - BD : BD$; но $BF - BA = BD = BC$, ибо $FD = AB$, а $BA - BD = AC$; и тако $BC : BA :: AC : BC$ или $\div AB . BC . AC$. Дѣйствїе сего заданїя называется раздѣлить черту въ среднемъ и крайнемъ содержанїи (Ариф. стр. 360).

244. VII. Между данныхъ линѣй AB, BC двѣ среднїе пропорцїоналн. сыскать.

Рѣш. Изъ данныхъ линѣй (ф. 61) здѣлай прямоугольникъ ABCD, проведя въ ономъ дїагонали найдется цѣнтръ E, изъ котораго разстоянїемъ $EC = EA$ опиши

кругъ.

кругѣ. Положа линѣйку на точку B, передвигайся на ней, пока цыркульнымѣ размѣреніемѣ придетѣ GO = BF: тогда AF, GC будутѣ искомыя линѣи, то есть ∺ AB. AF. GC CB.

Сїе рѣшенїе есть механическое, кое по простой геометріи никакѣ учинить невозможно.

Доказ. Ибо (221) DG × GC = GB × GO, также DF × FA = BO × FB. Отѣ сочин. GO = BF, и BG = OF, по сему BG × GO = OF × BF, отѣ равности DG × GC = DF × AF, что поставя вѣ пропорцїю есть BG : DF :: AF : GC. Но для подобныхѣ триугольниковѣ, DG : DF :: AB : AF, по сему AB : AF :: AF : GC; при томѣ же AB : AF :: GC : CB, того ради AB : AF :: AF : GC :: GC : CB, то есть ∺ AB AF. GC. CB. (вычис. вѣ Арїф. стр. 360)

245. Изѣ трехѣ линѣй Геометр. прогрессїи, какѣ OL, EL, LC (ф. 62) опредѣлить прочїя вѣ бесконечность. Продолжи LC, LE безпредѣльно, по томѣ изѣ C, M, N и пр. воставленныя перпендик. или кѣ CE, OE проведенныя паралельли означутѣ на продолженныхѣ линѣяхѣ несмѣтное число оныхѣ членовѣ; а убывающей прогрессїи члены найдутся вѣ самомѣ △ LCE.

246.

246. IX. Геометрическій мастабъ или размѣръ начертить.

Рѣш. 1е. Назначь линѣю AE, (ф. 63) и на концахъ ея поставь перпендикуляры AD, EF. 2е. Отъ A до D и отъ E къ F, положа также произвольной величины по 10ти равныхъ частей; проведи паралельныя линѣи къ AE. 3е. Тѣхъ же по 10ти частей, намѣтя отъ A до B и отъ D до C, проведи діагональныя линѣи Da и проч. кои раздѣлятъ линѣю AB на 100 равныхъ частей; буде каждая оной часть возмется за 10, а ежели за единицу, то на паралельляхъ будутъ десятины; ибо (206) $EC : Bp = eC : pq$ то есть $10 : 1 = 1 : \frac{1}{10}$ или къ $\frac{1}{100}$ части линѣи AB. 4е. На конецъ отъ точекъ A, D на линѣяхъ AE, DF положи по скольку нибудь частей равныхъ величинѣ AB. Такимъ образомъ сей мастабъ совершится, которой съ великою пользою для начертанія разныхъ геометрическихъ фигуръ употребляется.

247. X. Даны части AB, EC (ф. 64) линѣи AC, и величина линѣи BD при равныхъ углахъ ADB, BDC, опредѣлить точку D.

Рѣш. 1е. Положи, что будто найдено мѣсто точки D, и чрезъ то означенъ тре-

угольникЪ ADC, около котораго думай описанЪ кругЪ ADCN; потомЪ продолжа ED до N, проведи линѣи AN, CN.

2 с. Понеже по заданїю уголЬ ADB = EDC; того ради уголЬ (90) ACN = NAC, и (125) AN = NC. И тако проведенной перпенд. NF на линѣю AC падетЪ вЪ средину ея F, и чрезЪ то линѣи AF, BF будутЪ извѣстны.

3 с. Но по свойству линѣи вЪ кругѣ (219) найдется BN, по которой и чрезЪ DB, FB, вЪ подобныхЪ треугольникахЪ FBN, EDE узнается BE и (214) величина перпенд. DE, а по оному и чрезЪ AE, EC сыщутся (213) линѣи AD, DC, и точка D опредѣлится. Тоже самое можно учинить по чертежу сЪ мастаба слѣдующимЪ образомЪ. На примѣрЪ пусть будетЪ AB = 107, какихЪ нибудь мѣрЬ, тѣхЪ же BC, = 156, BD = 48; по сему сыскавЪ сперьва (219) BN, назначь линѣю AC, и на нѣй положи сЪ мастаба величины AB, BC, а изЪ средины F воставленной перпендикулярЪ FN, пересѣки сысканною линѣею BN изЪ B вЪ точкѣ N: потомЪ чрезЪ точки A, C, N вЪ описанномЪ (100) окруженїи продолженная

долженная линѣя BN опредѣлитъ желаемой пунктъ D, при равныхъ углахъ ADB, BDC; ибо по сочинѣнїю уголъ BAN = BCN.

248. XI. Имѣя данную линѣю AB (ф.52) начертить равнобедренной △, коего бы углы при основанїи были въ двое больше верхняго угла.

Рѣш. Раздѣли (243) линѣю AB въ крайнемъ и средн. содерж. въ C: по томъ изъ A, C разстоянїемъ BC здѣлавъ пересѣчку дугъ въ D, проведи BD, DA. (231).

249. XII. На данной линѣе AD (ф. 52) правильной десятїугольникъ начертить.

Рѣш. Раздѣля бокъ AD въ крайн. и средн. содржанїи (243) приложи къ нему большую часть, то сумма будетъ (201) = AB = радїусу круга, въ коемъ начертится желаемой полигонъ.

250. XIII. На данной линѣе DC (ф. 53) пятїугольникъ написать.

Рѣш. Положимъ что оной здѣланъ, понеже AC раздѣлена по крайнему и среднему содержанїю и AF = DF или DC; того ради раздѣля AF по сему же содержанїю придай къ ней среднюю, и будетъ линѣя AC (201). А сыскавъ дїагональ AC = AD, пятї-

угольникЪ лехко уже начертишь можно.

* *

О сравненіи подобныхЪ фигурЪ.

251. ДвѢ какіе нибудь фигуры суть подобныя, буде они имѢютЪ по равному числу сторонЪ, и всѢ стороны одной пропорціональны сходственнымЪ сторонамЪ другой фигуры, и всѢ углы сими сторонами содержимыя вЪ обоихЪ фигурахЪ, между собою равныя. ИзЪ сего явствуетЪ,

I е. всѢ правильныя одного виду полигоны, слѢдовательно и круги суть фигуры подобныя; такЪ же какіе нибудь дуги равнаго числа градусовЪ суть фигуры подобныя.

II е. двѢ подобныя фигуры разнятся только вЪ томЪ, что одна есть меньше другой, или что оныя сЪ разныхЪ мастабовЪ сочинены.

252. I. ДвѢ подобныя фигуры какимЪ образомЪ ни раздѢлятся на треугольники отЪ діагоналей, чрезЪ сходственныя углы проходящихЪ, но сходственныя треугольники будутЪ всегда подобныя.

Доказ. Ежели вЪ двухЪ полигонахЪ (ф. 65 и 66) $\angle$ A = F, B = G, C = H, D = I, E = K, и буде AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF, говорю, когда проведутся діагонали AC, AD, FH, FI, то треуголь-

треугольники ABC, FGH, ACD, FHI, и проч. суть подобныя.

Ибо уголъ B = G и стоятъ между пропорціональныхъ сторонъ, по сему (210) треугольники ABC, FGH подобныя; такія же и ADE, FIK. Но отъ равныхъ угловъ вычтя равныя останется ∠ DAC = IFH, и ADC = FIH, потому (130) треугольники ACD, FHI такъ же подобныя.

253. II. обратно, когда двѣ какіе нибудь фигуры могутъ раздѣлиться на равное число подобныхъ треугольниковъ, тогда оныя фігуры суть подобныя.

Доказ. Ибо углы равноугол. треугольниковъ составляютъ равныя углы фигуръ, а стороны фигуръ суть бока равноугол. треугольниковъ также (207) пропорціоналны; потому и цѣлыя такія фигуры суть подобныя (251)

254. III. ежели въ двухъ подобныхъ полигонахъ проведутся какіе нибудь линѣи однимъ положеніемъ, то есть, кои раздѣлятъ сходственныя стороны или углы въ равномъ содержаніи, тогда 1е. оныя линѣи какъ между собою, такъ исходственнымъ какимъ нибудь бокамъ сихъ полигоновъ будутъ пропорціональныя. 2е. Сходственныя части таковыхъ полигоновъ будутъ подобныя.

Доказ. Напримѣръ. 1е. Раздѣля BC, въ L (ф. 65, 66) и GH въ M въ одномъ содержаніи, то есть BC : GH :: LC : MH, ежели

провесть линѣи LN, MO такъ, чтобъ уголъ ELN = HMO, или чтобъ раздѣлили въ равномъ содержанiи бока ED, KI, такъ ED : KI :: DN : IO, тогда будетъ LN : MO :: CD : HI :: BC : GH :: AB : FG и проч.

Ибо ежели провесть NC, OH, то для равныхъ угловъ D, I, содержимыхъ пропорцiональными сторонами, треугольники NCD OHI суть (210) подобныя; по сему (206) CD : HI :: CN : HO, и ∠ DCN = IHO, кои вычтя изъ ∠C = H, останется ∠NCL = OHM, и по тому (209) треугольники NCL, OHM суть также подобныя; того ради LN : MO :: CD : HI :: BC : GH и проч.

2 е. Притомъ же явствуетъ, что линѣи LN, MO раздѣляютъ полигоны на 4 фигуры, коихъ сходствен. LNDC, MOIH, и другiя двѣ суть подобныя; ибо оныхъ сходственныя углы между собою равныя и схожiя ихъ стороны пропорцiональныя.

255. буде проведутся въ тѣхъ фигурахъ еще двѣ какiя нибудь линѣи пропорцiонально, или перпендикулярно какъ HQ, EP, и проч. то оныя по такому же доказательству будутъ сходственнымъ линѣямъ пропорцiональныя. Равнымъ положенiемъ

проведен-

проведенныя двѣ линѣи въ двухъ подобныхъ фигурахъ, также радїусы или хорды двухъ круговъ, и хорды двухъ равныхъ дугъ называются сходственныя измѣренїя; и по тому общее свойство подобныхъ фигуръ состоитъ въ томъ, что всѣ ихъ сходственныя измѣренїя суть пропорцїональныя.

256. Пробл. I. На данной линѣе какъ DF (ф. 20) здѣлать △ подобной данному △ BCA.

Рѣш. Къ линѣе DF припиши (59) ∠ D = B и F = C; тогда угловъ стороны DE, FE своею стычкою въ E учинятъ △ DEF равноугольной и (130) подобной съ △ BCA.

257. II. На данной линѣе начертить какой нибудь полигонъ данному подобной.

Рѣш. 1е. Ежели данная линѣя ED (ф. 65) а полигонъ Z (ф. 66), то проведя дїагонали IF, FH здѣлай (256) △ EDA подобн. △ KIF; потомъ на AD, △ ADC подобной съ △ IFH; на конецъ на AC начерти △ ACB подобной △ HFG; и тако здѣлается полигонъ X подобной полигону Z. 2е. Буде данная линѣя какъ AB на одной съ основанїемъ Ab (ф. 67), тогда изъ A продолжа дїагонали, чрезъ B проведи (60)

 параллель-

паралельныя сторонамъ полигона линѣи, кои своимъ пресѣченїемъ съ дїагоналями изобразятъ полигонъ на линѣе AB подобной данному. Сїе также дѣлается когда заданная линѣя будетъ меньше основанїя даннаго полигона.

* *

О обводѣ фигуръ и осравнѣнiи оныхъ.

258. I. Перимѣтръ или обводъ всякаго полигона равенъ суммѣ его сторонъ.

259. II. Обводы двухъ подобныхъ фигуръ имѣются къ своимъ сторонамъ, или къ какимъ нибудь ихъ схожимъ измѣренїямъ пропорцїональныя.

Доказ. Ибо обводъ первой фигуры къ обводу второй есть, какъ сумма сторонъ первой къ суммѣ второй; а для пропорцїональности сторонъ (253) подобныхъ фигуръ, стороны первой суть предъидущїя, а сходственныя стороны второй, по слѣдующїя члены пропорцїи: но (199) сумма предъидущихъ къ суммѣ ихъ послѣдующихъ, какъ одинъ какой нибудь предъидущей къ своему послѣдующему; то есть какъ обводъ первой фигуры къ обводу

второй

второй, такъ какой нибудь первой фигуры бокъ къ сходствен. боку второй, или (254) иное какое измѣренїе въ первой къ сходств. измѣренїю во второй фигурѣ; а изъ сего явствуетъ,

260. Iе. Окружности круговъ, или величины двухъ дугъ не равныхъ кругомъ токмо равнаго числа градусовъ суть съ ихъ радїусами и съ дїаметрами пропорцїональны, или на конецъ съ двумя хордами, кои содержутъ въ каждомъ кругѣ или дугѣ равное число градусовъ. Ибо круги или дуги (254) равнаго числа градусовъ, суть фигуры подобныя, а радїусы, дїаметры, и хорды оныхъ суть сходс. измѣренїя (255).

261. IIе. Ежели отъ точки A (ф 37) касанїя многихъ круговъ проведется линѣя AD ихъ пересѣкающая въ B, C, D, тогда ея части съ оными кругами, или хорды съ своими дугами будутъ пропорцїональны. Ибо (97) всѣ дуги одинакаго числа градусовъ суть фигуры подобныя.

262. III, изъ двухъ правильныхъ политоновъ равныхъ периметровъ, имѣющей болѣ сторонъ большей имѣетъ Апотемъ.

Доказ. Пусть GH (ф. 68) есть бокъ десяти угольника а BC пяти угольника = 2 GH;

говорю что LF болѣ AD. Ибо раздѣля углы F, A пополамъ будетъ ∠ LFH = 18, а ∠ DAC = 36; раздѣля сей ∠ DAC пополамъ же, будетъ (226) DE меньше EC или LH: по сему въ равноугольн. треугольникахъ FLH, ADE бокъ LH есть болѣ бока DE, сего ради и LF болѣ есть нежели AD.

Увѣдом. 1 е. Предписанныя Геометрическія дѣйствія, (98, 99) и прочія тому подобныя можно иначе доказывать чрезъ предложенія о первомъ сравненіи треугольниковъ (129).

2 е. Въ прибавокъ къ проблемамъ (послѣ 176) нѣкоторыя не внесены, какъ то начертаніе квадрата въ ромбусѣ, равнобоч. △ въ квадратѣ и проч. для того что оныя пустыя школьныя задачи, и коихъ безъ показанія зная прешедшую часть Геометріи чертить и доказывать уже не трудно.

3 е. Выуча показанныя свойства линѣи, всякія лонгиметрическія по вычисленію задачи помощію Арифметики легко рѣшить можно.

4 е. Увеличиваніе и уменьшеніе фигуръ, въ разсужденіи ихъ сторонъ или обводовъ, есть одно дѣйствіе съ начертаніемъ подобныхъ фигуръ (256, 257).

ЧАСТЬ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О ПЛАНИМЕТРІИ

****

I. О мѢрахЪ по которымЪ величины поверхностей опредѢляются.

263. Поверьхность или площадь фигуры называется количество изЪявляющее пространство сторонами оной содержимое.

264. Поверьхность есть протяженіе о двухЪ измѢреніяхЪ (3); но каждаго измѢренія особно, точная мѢра есть прямая линѢя, и по тому оная мѢрою поверьхности быть не можетЪ. ибо не льзя имѢть понятіе, напримѢрЪ о пространствѢ или поверьхности двора, ежели только скажу, что онЪ длиною 100 саженЪ, но буде прибавлю кЪ кому, что онЪ всюду шириною по 20 саж. тогда ясно представится фигура двора паралеллограмомЪ, котораго длина вЪ пятеро болѢ ширины.

265. МѢры поверьхностей должны быть поверьхности, какЪ мѢры линѢи суть линѢи. Ежели потребно вымѢрить поверьхность вЪ саженяхЪ или вЪ футахЪ, то неминуемо на то должно употребить площадь каждой сажени или фута; а понѢже футЪ поверьхности натурально не инако разумѢется, какЪ пространство (то есть фигура сторонами определенная) имѢющее всюду длину и ширину по футу: но длина вымѢривается по перпѢндикуляру (54) соединяющему двѢ стороны, кои длину фігуры опредѢляютЪ, а ширина должна вымѢрена быть по перпендикуляру, которой соединяетЪ двѢ стороны ширину опредѢляющія; и тако пространство фута поверхности долженствуетЪ быть квадратная фігура, которой каждая

сторона

сторона по футу. Также рассуждается и о другихъ мѣрахъ яко квадр. саженяхъ, вѣрстахъ и проч.

266. Изъ того можно во обще заключить, что квадратъ есть общая мѣра повѣрхностей: и для изъявленія величины повѣрхности или площади какой нибудь фігуры, говорится что она толикихъ квадратныхъ дюймовъ, футовъ, саженъ, и проч. Сіе значитъ, что всѣ то пространство можно покрыть толикими квадратными дюймами, футами, саж. и проч. сколько ихъ въ немъ помѣстить можно.

267. Число частей мѣры квадратной, равно квадрату частей той мѣры въ длину. Наприм. квадратной футъ содержитъ 144 квад. дюйм. а сажень 49 квад. футовъ; ибо квадратной футъ состоитъ изъ 12 рядовъ, въ каждомъ по 12 квадр. дюймовъ, а въ саженѣ квадратной есть 7 рядовъ, и въ каждомъ по 7 квадр. футовъ.

* *

О способѣ измѣренія повѣрхностей

268. Вымѣрять полигонъ, значитъ, сыскать число квадратныхъ саженъ, либо футъ или иныхъ квадратн. мѣръ, кое содержитъ его поверхность. Положимъ напримѣръ сыскать площадь въ прямоугольникѣ ABCD (ф. 28) коего основаніе $AB = 5$ футамъ, высота $BC = 7$ футамъ. По сему (267), раздѣля площадь на 7 полосъ, придетъ въ каждой полосѣ по 7 ми квадр. футъ, а во всѣхъ $7 \times 5 = 35$ футъ квадратныхъ есть площадь прямоугольника. Иначе послѣдующему генеральному способу.

Ежсли

Ежели линѣя AB (ф. 26 или 28) сама себѣ движется паралельно до пришествія ея въ DC, то явно, что при каждой ступени ея теченія покроетъ она часть повѣрхности, равную своей длинѣ AB, а пришедъ въ DC откроетъ всю повѣрхность паралеллограмма ABCD; посему цѣлая онаго площадь равна линѣе AB, столько разъ взятой, сколько она учинила ступеней двинжась отъ AB до CD: но сіе число ступеней равняется числу точекъ прямой размѣряющей расстояніе паралельныхъ AB, DC, которое есть (54) перпендикуляръ провѣденной изъ какой нибудь точки линѣи DC на черту AB, (по надобности продолженную) какъ CF или EF. И тако площадь паралеллограмма ABCD равна числу точекъ линѣи AB, столько разъ взятому сколько есть точекъ въ линѣе EF, или равна произведенію линѣи AB умноженной линѣею EF, то есть AB × EF.

269. Перпендик. EF или CF размѣряющей разстояніе двухъ паралельныхъ сторонъ называется высота паралеллограмма, и каждая изъ сихъ двухъ сторонъ имянуется база или основаніе.

Слѣд. Для измѣренія площади всякаго паралел-

параллелограмма несмотря на его обводъ наблюдается только онаго основанїе и высота; изъ сего явствуетъ,

270. I. Площадь какого нибудь параллелограмма равна произведенїю его основанїя высотою.

Примѣч. Каждой слѣдъ прямой AB (коихъ сумма равна площади параллелограм. ABCD) есть настоящей параллелограмецъ имѣющей за ширину величину каждой ступени черты AB: но какъ сїя величина безмѣрно мала, то каждой слѣдъ можно почесть за линѣю AB, и во обще сказать, что площадь какой нибудь фигуры равна суммѣ всѣхъ паралельныхъ линѣй, сколько ихъ въ оной фигурѣ провесть можно.

271. II. Поверхность или площадь всякаго треугольника равна половинѣ произведенїя котораго нибудь его бока умноженнаго перпендикуляромъ отъ противнаго угла на тотъ бокъ (по надобности продолженной) проведеннымъ. Ибо (160) параллелограмъ раздѣляется дїагоналемъ на два равныя треугольника, и по сему всякой △ должно признавать за половину параллелограмма, котораго высота есть перпендк. изъ угла

на противной бокъ опущенной.

Сїе можно доказать не завися отъ паралеллограмма слѣдующимъ образомъ.

Поверхность всякаго △, какъ ABC (ф. 41) равна суммѣ всѣхъ паралельныхъ линѣй, какъ BC, FK, EI, и проч. проведенныхъ отъ основанїя BC до верха A; но всѣ оныя паралельли умаляются въ арифметической прогрессїи, то есть съ одинакою разностїю; ибо BC — FK = BL + RC, и FK — EI = FN + QK и проч. Сїи разности между собою равныя, по тому что всѣ треугольнички BLF, FNE и проч. равныя (206), также и △ RCK = QKI, и проч. по сему BL + RC = FN + QK. Того ради всѣ оныя паралельли площадь △ наполняющїя можно принять за поступленїе величинъ въ арифметической прогрессїи, коей число извъявляетъ перпендик. AZ; BC послѣдней, а A паралель безмѣрно малая, есть первой членъ; и (Арїѳ. стр. 334) оной сумма = (BC + A) × $\frac{1}{2}$ AZ, или въ разсужденїи безмѣрной малости паралельли A, сумма всѣхъ сихъ паралельныхъ = BC × $\frac{1}{2}$ AZ, то есть площадь въ △ равна произведенїю основанїя полувысотою.

272. Слѣдс. Площади всѣхъ треугольниковъ

никовъ и параллелограммовъ находящихся между двухъ параллелей и кои имѣютъ одно или равныя основанія, между собою суть равныя; по тому что они тогда имѣютъ одну высоту. Все сіе можно иначе доказать слѣдующимъ образомъ.

Доказ. Пусть параллелограммы ABCD, ABEF (ф. 69) стоятъ на одномъ основаніи AB и между двухъ паралельлей Z, X. Понеже (144 и 160) бокъ AB = DC = EF, и будет къ равнымъ DC, EF приложить CF, выдетъ DF = CE; притомъ AD = BC, AF = BE: и тако два треугольника ADF, BCE между собою равносторонныя и (132) равныя, изъ коихъ вычтя общую ихъ часть CGF останутся равныя трапезіи ADCG, BEFG, приложа послѣ къ онымъ одну площадь ABG здѣлается параллелограмъ ABCD = параллелограму ABEF.

Примѣч. Ежели точка E придетъ между D и C, какъ H параллелограмма ABHI, тогда слѣдуетъ изъ IH и DC вычесть общую DH, и къ равнымъ треугольн. ADI, BCH приложить трапезію ABHD. Но понеже всякой параллелограмъ есть (160) въ двое треугольника имѣющаго съ нимъ одно

одно основанїе и одну высоту, какъ (ф. 69) треугольники ABF, ABC, ABH суть половины своихъ паралеллограммовъ; по сему и треугольники имѣющїя равныя основанїи и высоты между собою равныя.

273. слѣдс. Iе. для сыску площади во всякомъ треугольникѣ надлѣжитъ его основанїе умножить высотою; то половина произведенїя, а умножа половину основанїя высотою или половину высоты основанїемъ; то цѣлое произведенїе будетъ искомая площадь треугольника.

274. IIс. Изъ двухъ линѣй AB, BC, (ф. 50) буде одна, какъ BC раздѣлена на несколько частей; то полупроизведенїи каждой части линѣею AB равны полупроизведенїю линѣи AB, BC. Ибо тоже самое умножить $\frac{1}{2}$ AB вдругъ чрезъ BC или особно чрезъ, AD, ED, EC, по тому что $AD + DE + EC = BC$, а цѣлыя произведенїя представляются прямоугольниками.

275. IIIс. Понеже вычисленїе площади всякаго △ зависитъ отъ его основанїя и высоты; посему въ равностор. и въ равнобедр. треугольникахъ знавъ стороны найдется (214) величина высоты, а въ неравнобочномъ (230) и проч. По заданной высотѣ CD (ф. 44) въ равнобочномъ △ ABC площадь ищется тако: понеже апотемъ

 CD

OD есть (218) треть высоты CD; по сему въ прямоуг. △ ADO найдется (214) сторона AD и проч.

276. III. Площади какихъ нибудь треугольниковъ имѣются въ составномъ содержанiи ихъ основанiи и высотъ.

Доказ. Площади треугольниковъ равны произведѣнiямъ ихъ основанiи полувысотами; но половины своимъ цѣлымъ пропорцiональны (192): по сему площади треугольниковъ въ одномъ содержанiи съ произведенiями ихъ основанiи и высотъ. А понеже (Ар. ст. 349) содержанiе произведенiи есть составное изъ двухъ членовъ; того ради площади треугольниковъ суть въ составномъ содерж. ихъ основанiи и высотъ.

277. Слѣдственно. Площади двухъ неравныхъ треугольниковъ имѣющихъ равныя основанiя, высотамъ пропорцiональны: и неравныя площади треугольниковъ, но при равныхъ высотахъ, съ своими основанiями пропорцiональныяжъ.

Доказ. Ибо тогда площади треугольниковъ имѣются въ одномъ содержанiи съ произведенiями одинакой величины умноженной двумя не равными величинами; и

потому

потому (191) тѣ площади онымъ неравнымъ величинамъ суть пропорціональныя.

278. IV. Когда у треугольниковъ ABC, DEF уголъ A = D, тогда △ ABC : △ DEF :: AB . AC : DF . DE. (ф. 70)

Доказ. Здѣлавъ △ AGH = △ DEF, будетъ △ ABC : △ ABH = AC : AH; но △ ABH : △ AGH = AB : AG, слѣдов. △ ABC : △ AGH = AC . AB : AH . AG, то есть, △ ABC : △ DEF = AC . AB : DF . DE.

279. V. Буде двухъ треугольниковъ высоты съ основаніями имѣются въ обратномъ содержаніи, тогда оные площади между собою суть равныя.

Доказ. Ибо высота перваго къ высотѣ другова, какъ онаго основаніе къ основанію перваго; и потому произведеніе высоты перваго треугольника его основаніемъ, равно произведенію высоты другова своимъ основаніемъ (194).

280. VI. Обратно; когда площади двухъ треугольниковъ равныя, тогда ихъ измѣреніи имѣются въ обратномъ содержаніи.

Доказ. Ибо произведеніе измѣреніи перваго треугольника равно произведенію измѣреніи другова. По сему измѣреніи одного

З 2 будутъ

будутъ крайними, а измѣренiи другаго средними членами пропорцiи: и тако, напримѣръ высота перваго треугольника къ высотѣ другова, какъ онаго основанiе къ основанiю перваго.

281. VII. Площади двухъ подобныхъ треугольниковъ, между собою суть во удвоенномъ содержанiи, или какъ квадраты ихъ сходственныхъ измѣренiевъ.

Доказ. Понеже (255) подобныхъ фигуръ сходств. измѣренiя пропорцiональны, то площади двухъ треугольниковъ между собою какъ два произведенiя двухъ пропорцiонал. величинъ: но (Ар. 349) произведенiи пропорцiональныхъ величинъ имѣются въ удвоенномъ содержанiи, или (193) какъ квадраты составляемыхъ величинъ. Того ради площади двухъ подобныхъ треугольниковъ между собою во удвоенномъ содержанiи ихъ сходственныхъ измѣренiи, или на примѣръ какъ квадратъ которой нибудь стороны одного къ квадрату схожей стороны другова треугольника.

282. Слѣдст: во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ какъ CEL (ф. 43) квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ боковъ, или CL□ = CE□ + EL□.

Ибо

Ибо опустя отъ прямаго угла перпендїкуляръ EO, явно что для подобныхъ треугольниковъ ECO, EOL, ECL (212, 281) есть △ ECO къ CE □, какъ △ EOL къ EL □, какъ △ ECL къ CL □, то есть ECO : CE □ :: EOL : EL □ :: ECL : CL □. Понеже (199) ECO + EOL : CE □ + EL □ :: ECL : CL □, но ECO + EOL = ECL, по сему CE □ + EL □ = CE □.

Тоже самое можно доказать такимъ образомъ (ф. 71) на сторонахъ треугольника ABC назначь три квадрата, тогда двѣ стороны меньшихъ перейдутъ чрезъ углы D, E большаго квадрата. Ибо у равныхъ треугольниковъ AIC, EFD, AEG, будетъ EF = BC, AC = AG, по тому что во всѣхъ оныхъ треугольникахъ ипотенузы и углы при A и B суть равныя (133). По томъ проведя EC, DC и чрезъ C паралельную HI къ ED, явно (271) что △ ACE = $\frac{1}{2}$ квадрата бока AC, и полупрямоугольнику AIHE, подобно △ BCD = $\frac{1}{2}$ квадрата бока BC также и $\frac{1}{2}$ прямоугольника IBDH: но оныя прямоугольники составляютъ AB □, того ради AC □ + BC □ = AC □.

283. VIII. Площадь трапецїи какъ ABCD (ф. 34) равна произведенїю двухъ паралельныхъ

лельныхъ сторонъ AB, CD полувысотою, то есть $(AB+CD)\times\frac{1}{2}ED$. Ибо на продолженную AB положа $BF=CD$, и проведя DF, будетъ для $\triangle FBG=GDC$, $\triangle FAD=$ трапецiи ABCD. Но площадь въ $\triangle FAD$ (273) $=AF$ или $AB+CD, \times\frac{1}{2}DE$.

284. Слѣд. Iе. Площадь всякой паралельной поверхности, какъ Z (ф. 72) равна произведенiю суммы паралельныхъ лiнѣй между A и B, и между D и C, половиною широты BE; ибо раздѣля оную фигуру на трапецiи, то каждой оныхъ площадь равна (283) произведенiю суммы двухъ паралельныхъ сторонъ полуширотою BE: по сему площадь всея фигуры равна произведенiю суммы паралельныхъ линѣй тою широтою.

285. IIе. Для сыску площади въ трапезiи ABCD (ф. 34) по всѣмъ заданнымъ ея сторонамъ, надобно чрезъ D къ боку BC провесть паралель DH, и будетъ $DH=BC$, и $AH=BA-CD$. По сему въ $\triangle HAD$ сыскавъ (230) высоту, наидется (283) площадь трапезiи. При семъ явно видно, какъ такую трапецiю по оному заданiю циркулемъ съ масштаба черпить должно.

286. IX. Площадь трапезоида, какъ A BCD (ф. 73) равна произведенiю полсуммы перпен-

перпендикуляровъ AE, CF умноженной дїагоналемъ BD. Ибо (273) $\triangle ABD = \frac{1}{2} BD \times AE$ или $BD \times \frac{1}{2} AF$, также $\triangle BCD = BD \times \frac{1}{2} CF$ И по сему площадь трапецїи $= \frac{AE + CF \times BD}{2}$ или $(AE + CF) \times \frac{1}{2} BD$.

287. X. Площадь всякой фигуры равна суммѣ площадей треугольниковъ въ оной находящихся. Слѣдственно, для вычисленїя площади неправильнаго полїгона, надлежитъ оныя раздѣлить въ треугольники и сыскать каждаго площадь (273), то сумма всѣхъ сихъ площадей равна будетъ площади даннаго полигона.

288. XI. Площадь правильнаго полїгона равна произведенїю половины его обвода, умноженной перпендикуляромъ изъ центра на которой нибудь бокъ проведеннымъ.

Доказ. Ибо всѣ треугольники правильнаго полигона между собою равныя и одинакой высоты CI (ф. 32): по сему площадь полигона равна $CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE + CI \times \frac{1}{2} EH$ и пр. Но (274). Всѣ сїи произведенїи равны CI умноженной на $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} EH$ и проч. или CI умножа половиною обвода полигона.

289. Слѣдст. I. Площадь круга равна произведенїю полуокружности его радїусомъ, или кругъ

 равенъ

равенъ треугольнику, коего основаніе равно окружности, а высота радіусу онаго круга.

290. II. Площадь круга равна площади квадрата коего бокъ есть среднїй пропорціональный между радїусомъ сего круга, и линѣи одной длины съ полуокружностью.

291. III. Площадь сектора круга равна произведенію радїуса сего круга чрезъ прямую линѣю, коя равна половинѣ дуги сего сектора; ибо части круга содержимыя между радїусовъ, дугамъ оныхъ частей пропорціональныя (277).

292. Площадь круга болѣ площади всякаго полигона имѣющаго съ нимъ равной обводъ; ибо кругъ есть полигонъ (177) имѣющей не смѣтное число сторонъ безмѣрно малыхъ, и чрезъ то (262) имѣетъ за апотемъ радїусъ больше апотемы всякаго инаго правильнаго полигона.

293. XII. Квадратъ AB имѣющей равной периметръ съ прямоугольн. AEC площадью онаго больше (ф. 75.).

Доказ. Пусть AC = суммѣ двухъ сторонъ, AB = ½ AC бока □. Положи AB = b, BE = BD = a; AE = b + a, EC = AD = b − a ихъ разность есть 2a. По сему $(b + a) \times (b - a) = bb - ab + ab - aa = bb - aa$. Слѣдовательно разность между площадей квадрата и прямоугольн. есть (aa) квадратъ полразности сторонъ. Притомъ площадь равнобочнаго △ болѣ площ. всякаго инаго треугольника имѣющаго съ нимъ одинакой обводъ.

294. XIII. Всякой полигонъ какъ ABCDE (ф. 75) можетъ превратится въ △ AEG равной ему площадью.

Доказ.

Доказ Проведя дїагональ BD отдѣляющей △ DBC, чрезъ C къ сему дїагоналю назначь паралель CF, и соединя DF, будетъ полигонъ AFDE съ уменьшенїемъ угла равенъ данному. Ибо ежели отъ равныхъ треугольниковъ DBC, DBF (272) вычтется общей DBH, останется △ DHC = BHF. Но по сочиненїю △ DHC изъ новаго полигона выключенъ а вмѣсто его вступилъ △ BHF; по сему оной полигонъ площадью опять равенъ данному. Равнымъ образомъ дѣйствуя, превратится еще новой полигонъ AEDF въ иной равной площадью, и такъ далѣе пока изъ полигона зделается одинъ треугольникъ AGE.

295. Слѣдст. Площадь какой нибудь фигуры равна произведенїю двухъ измѣренїи, или может превратится въ одно произведенїе двухъ измѣренїи.

296. XIV. Площадь всякаго △ ABC (ф 76) есть средняя пропорцїональная между произведенїемъ частей DC, AD касательной AC, и произведенїемъ полуобвода умножен. частью касательной BE или BH.

Доказ. I е. Начертя въ данномъ △ кругъ, изъ центра онаго O, къ точкамъ касанїя

проведи перпендикуляры OD, OH, OE, а въ углы △ ка линѣи OB, OA, OC. 2е. По томъ продолжа бокъ AB, положи AP = DC, и будетъ BP полобвода; понеже (135) BH = BE, HA = AD, AP = DC = CE, то BH + HA + AP = BP половинѣ обвода. 3е. Продолжа BC, положи CR = AD, и будетъ BR также равна полуобводу или = BP, и при томъ явно что RC = AD = BR − BC, и AP = DC = BP − AB: но EC + CR = AC, потому BE = BR − AC; то есть разности между полуобводомъ и каждою стороною △ ABC. 4е. Изъ точекъ P, R воставь перпендикуляры, которыя съ продолженною BO пресѣкутся въ точкѣ S; то для равныхъ треугольниковъ PBG, SBR, ибо BP = BR и углы при B (135) равныя, будетъ PS = RS. 5е. Положа PQ = AD проведи QS, SA, SC то въ равныхъ треугольникахъ PSQ, CSR будетъ QS = SC: но AC по сочиненїю равна AQ, того ради △ AQS = ACS (132), по сему и уголъ QAS = SAC. Но углы AOD, PAS равныя, потому что полусуплементы одного DAH.

И тако въ подобныхъ треугольникахъ ADO, PAS, есть OD : DA :: AP : PS, или DC : PS, и OD × PS = DA × DC. А для

подоб-

подобныхъ треуголниковъ BHO, BPS, BH или BE : HO или къ OD :: BP : PS; умножа одно содержаніе BE : OD чрезъ BP, а другое чрезъ DO выдетъ BP × DO : PS × DO :: BE × BP · OD × BP. Но PS × DO = DA × DC; по сему (BP × DO) × (BP × DO) = (DA × DC) × (BE × BP) = ABC □, ибо площадь △ ABC = BP × DO.

Примѣръ AC, 30. BC, 28. AB, 26; по томъ

```
 30
 28                          528
 26                          192
--------------------
2 |48| 42  42  42    √² 112896 | 336 площадь
  |  | 28  26  30               въ △ ABC.
       -----------
       14  16  12
       42  12
  ----------
     588. 192
```

Слѣдст. Сыскавъ и не употребляя высоты площадь въ △, радіусъ вписаннаго круга найти уже нетрудно; ибо оной равенъ квотусу произходящему отъ раздѣленія площади на число равное полуобводу треугольника.

297. Примѣч. Iе. Площадь правильнаго пятиугол. позаданному его боку CD (ф. 53) находится тако: бокъ DC раздѣли (243) въ крайнемъ и среднемъ содержаніи, и приложа къ нему большую, то цѣлая линѣя будетъ (250) діагональ DB или AD. въ прямоугольн. △ ADI сыскавъ (214) перпенд. AI, изъ центра O опусти перпенд. ON раздѣляющей бокъ AD пополамъ (126). для подобныхъ треугольниковъ

угольниковъ ADI, AON будетъ AI : AD :: AN : AO, по сему AI — AO = OI, и такъ сыскавъ апотемъ OI, найди (273) въ равнобедр. △ DOI площадь, которую упятеря получите площадь всего даннаго пятиугольника; иначе (232)

2 е. площадь въ правильн. шестиугольникѣ найдется, сыскавъ (214) площадь въ одномъ онаго равностор. треугольн. 3 е. для сыску площади въ прочихъ правильныхъ полигонахъ должно начертя ихъ съ мастаба мѣрять въ нихъ апотемы, а послѣ (288). 4 е. въ неправильныхъ же полїгонахъ находится площадь по раздѣленїю ихъ въ треугольники, коихъ вычисля или смѣря по мастабу, сыщутся высоты, а послѣ площади и проч.

298. XV. Площади двухъ подобныхъ фигуръ между собою въ удвоенномъ содержанїи, или какъ квадраты ихъ сходственныхъ измѣренїи.

Доказ. Ибо (254) сходственныя треугольники, на которыя раздѣлятся два подобныя полїгона, суть подобныя части оныхъ фигуръ: по сему (192) цѣлыя полїгоны суть пропорцїональны своимъ сходственнымъ частямъ: но (281) площади оныхъ частей или треугольниковъ въ удвоенномъ содержанїи своихъ сходственныхъ измѣренїи, а (255) оныя измѣренїи семъ измѣренїямъ въ обоихъ полигонахъ пропорцїональны; того ради площади подобныхъ полигоновъ въ удвоенномъ содержанїи или какъ квадраты ихъ сходственныхъ измѣренїи.

299. Слѣдст. I. Площади круговъ между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ или ихъ діаметровъ (251).

300. II. Когда потребно увеличить или уменьшить площадь какова нибудь полигона въ подобной, то для сысканія каждой стороны полигона, сперва учини сію пропорцію: какъ площадь даннаго къ площади искомаго полигона, такъ квадратъ бока даннаго къ квадрату сходственной стороны искомаго: потомъ какъ тотъ бокъ къ сысканному, такъ каждой бокъ даннаго ко всякому сходственному боку искомаго полигона. На прим. здѣлать прямоуг. A коего бы площадь была тройная прямогольн. B, котораго длина 6 ф. ширина 4 ф. Тогда какъ 1 къ 3 такъ 36, квадратъ 6 ти футъ къ 108, квадрату длины прямоугольника A, коего радиксъ есть 10.392 ф. Потомъ какъ 6 къ 10. 392, такъ 4. къ 6. 928 ф. ширина прямоугол. A; по сему длина прямоуголн. A есть 10 ф. 4 д. 7 л. а ширина 6 футъ 11 дюймовъ.

301. Зад. I. Данному полигону (ф. 77) около внутренной произвольно взятой точки O начертить подобной, чтобъ площадью былъ въ трое мѣньше даннаго.

рѣш.

рѣш. Изъ точки O проведя ко всѣмъ угламъ дїагонали, и раздѣля изъ оныхъ которой нибудь, какъ OB на 3 равныя части (то есть на столько частей, во сколько данной полигонъ уменьшить должно) положи на продолженную OB одну часть BI и между OB и BI сыскавъ (241) среднюю пропорц: BS, отмѣть ON = BS. На конецъ начиная отъ точки N къ сторонамъ даннаго полигона проведенныя паралельли означатъ требуемой полигонъ. Ибо по сочиненїю ∻ OB. BS.BI, и (298) площадь даннаго полигона къ уменьшенному какъ OB □ къ BS □ или къ ON □, равно какъ OB къ BI: но OB въ трое болѣ BI, того ради данной полигонъ въ трое больше уменьшеннаго, и отъ сочиненїи оба подобныя.

302. Обратно. Когда понадобится какой полигонъ въ несколько разъ увеличить, тогда должно между ON и ON столько разъ взятой, восколько разъ полигонъ ищется больше даннаго, сыскавъ среднюю пропорцїональную положить отъ O какъ до B. Потомъ проведя паралельли начиная отъ точки B начертится увеличенной полигонъ по желанїю.

303

303. II. На продолженной линѣе Аь данной полигонъ увеличить площадью въ данномъ содержанiи какъ Аь : ьG. (ф. 67).

Рѣш. Между основанiемъ Аь даннаго полигона и ьG сыщи средьнюю пропорцiональную ьН, потомъ положа АВ = ьН здѣлай (257) подобной полигонъ данному, и оныя будутъ въ заданномъ содержанiи.

304. III. Данной △ ABC (ф. 78) по данному основанiю BD въ иной превратить.

Рѣш. Соединя CD, проведи (60) къ ней паралельную AE, и назнача DE, тогда для равныхъ (294) площадей DAF, FEC, будетъ △ BDE = △ ABC.

305. IV. Заданной △ ABC (ф. 79) по данной высотѣ H въ иной превратить.

Рѣш. Разстоянiемъ H проведи (62) паралель FG секущую AC въ D. Назнача DB здѣлай къ нѣй паралельную CE, по томъ проведя DE будетъ △ AED = ABC.

306. V. Треугольникъ ABC (ф. 80) переменить въ иной, у котораго бы одинъ уголъ равенъ былъ данному углу Z.

Рѣш. Проведя CD паралельно къ AB, здѣлай ∠ BAE = Z, и соединя BE будетъ △ ABE = ABC (272). Равнымъ образомъ и

всякой

всякой паралеллограмъ по данному ∠ въ иной превращается, какъ явствуетъ въ фиг. 69.

307. VI Данной △ ABC (ф. 81) въ прямоугольникъ превратить.

Рѣш. Опустя перпенд: CD раздѣли его пополамъ въ G, чрезъ G къ AB, а изъ A и B къ CD проведя паралельныя линѣи здѣлается прямоугольникъ ABEF = △ ABC.

308. VII. Данной прямоугольникъ ABEF (ф.81) въ квадратъ превратить.

Рѣш. Продолжа AB, положи BH = BE; раздѣля AH пополамъ въ K, изъ K, разстоянїемъ KH, начерти полкруга: продолжа BE до окружности, будетъ BI бокъ искомаго квадрата; ибо AB × BE или BH = BI□.

309. Слѣдст. всякой полигонъ геометрическїй въ квадратъ превратить можно; ибо полигонъ приводится (294) въ треугольникъ, а треугольникъ (308) въ квадратъ.

310. VIII. Данной квадратъ AF (ф. 82) превратить въ прямоугольникъ, котораго ширина съ длиною равна линѣе AB.

Рѣш. Изъ средины C линѣи AB, начерти полкруга, потомъ изъ точки пресѣченїя D опусти на AB перпендик.. DE, тогда прямоугольникъ имѣющїи длину BE, ширину AE, равенъ есть □ AF; ибо (216) AE × BE = DE□.

Слѣдст.

Слѣдст. Сїе есть тоже самое, когда дана средняя пропорцїональная да сумма крайнихъ, сыскать крайнїя члены.

311. IX. Данной квадратъ ABCD (ф. 83) въ равнобочной треугольникъ превратить чтобъ площадью были равныя.

Рѣш. На сторонѣ AB квадрата здѣлай равнобочной △ ABE, котораго бокъ AE продолжи до F: по томъ между AF и двойной AB сыщи среднюю пропорцїон. AG, и оная будетъ бокъ искомаго треугольника.

Доказ. Проведи перпендикуляръ FH. Ибо (281) △ линѣи AG къ △ линѣи AF какъ AG□ : AF□ или какъ 2 AB : AF; раздѣля сїе содержанїе на 2 будетъ AG□ : AF□ :: AB : $\frac{1}{2}$ AF, и умножа послѣднѣе содерж. чрез AB выдетъ AG□ : AF□ :: AB□ : $\frac{1}{2}$ AF × AB. Но $\frac{1}{2}$ AF × AB или HF = площади равносторонняго △ линѣи AF, по сему △ AG : △ AF :: AB□ : △ AF, и тако отъ равности послѣдующихъ вышелъ △ AG = AB□.

312. X. Какой нибудь не равносторонной треугольникъ ABC (ф. 84) въ равнобочной превратить.

Рѣш. На основанїи AB здѣлавъ равнобочной треугольникъ ABE, чрезъ C про-

* *

О дѣленіи поверьхностей.

320. Дѣленіе фигуръ есть дѣйствіе какъ всякой предложенной полигонъ настолько частей, на сколько потребно раздѣлить прямыми линѣями отъ одной или многихъ данныхъ точекъ проведенными. Знаніе сего единственно до геодезіи или землемѣтріи принадлежитъ, что все во многихъ слѣдующихъ задачахъ ясно изтолковано.

Задача: I. Данной △ ABC (ф. 88) на сколько нибудь равныхъ площадей раздѣлить линѣями паралельными основанію BC.

Рѣш. Буде потребно на 3 равныя части, тогда бокъ AB или AC на столькожъ частей раздѣля въ D, E, сыщи (241) между AE и AC, и между 2 AE или AD и AC средніи пропорц. AF, AG, и послѣ проведенныя линѣи FH, GI паралельно къ BC раздѣлятъ △ ABC на три равныя части.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ AFH: ACB (281) какъ AF□ : AC□ или какъ AE : AC; но AE $= \frac{1}{3}$ AC, потому и △ AFH $= \frac{1}{3}$ ABC. Также △ AIG : ABC :: AD : AC; но AD $= \frac{2}{3}$ AC, того ради △ AIG $= \frac{2}{3}$ ABC. По сему изъ △ AIG — AFH останется трапезія IF $= \frac{1}{3}$ ABC и пр.

II. Треугольникъ ABC (ф. 89) на двѣ равныя части раздѣлить перпенд. къ основанію AB проведеннымъ.

Рѣш-

Рѣш. Опустя перпендик. CD, между AB и половиною большой части AD найди среднюю пропорц. AH. Положа AE = AH, изъ точки E поставленной перпенд. EF раздѣлитъ △ ABC по заданію.

Доказ. Ибо для подобныхъ треугольн. ADC, AEF есть AD : DC :: AE : EF. Умножа первое содержаніе на AB, а второе на AE, будетъ AB × AD : AB × CD :: AE□ : AE × EF, перемѣня члены выдетъ AB × AD : AE□ :: AB × CD : AE × EF. Но (212) AB × AD = 2 AE□, по сему AB × CD = 2 AE × EF, и такъ половина △ ка ABC = △ AEF.

Ежели угодно отъ треугольника ABC, перпендикуляромъ EF отнять $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и проч. часть, тогда линѣи AD берется $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ часть и проч.

III. Треугольникъ ABC (ф. 90) отъ данной точки D на двѣ равныя части раздѣлить.

Рѣш. Проведя AD, изъ средины E линѣи BC здѣлай къ AD параллель EF, послѣ проведи DF, которая раздѣлитъ пополамъ △ ABC.

Доказ. Проведя AE, треугольники ABE, AEC суть равныя. Но (272) △ ADE = ADF,

по сему CD:DG = A:L. Отъ сочин. прямо угольн. CE = A, а DH = B, и тако CD: DG = A:B = A:L, и отъ равности предъидущихъ фигура L = B.

* *

ПРИМѢЧАНІИ НА КВАДРАТУРУ КРУГА.

316. хотя чрезъ прешедшія предложенія содержаніи между окружностей и площадей двухъ круговъ и познаваются, однако по нынѣ еще славнѣйшія Математики со всемъ своимъ стараніемъ не могли опредѣлить точнаго содержанія между діаметромъ круга и его окружности: и тако по заданной величинѣ діаметра въ числахъ, точную величину его окружности сыскать не можно, ни величину его площади, коя равна (289) произведенію радіуса полуокружностію, и для того говорится, что еще не найдена квадратура круга, то есть точная его площадь; а слово квадратура произходитъ отъ сего что квадратъ есть общая мѣра всякой поверхности.

317. Содержаніе діаметра къ окружности круга можетъ очень близко сыскаться, или Механически, на примѣръ сравнивая съ діаметромъ круга длину нитки будучи точно положенной по его окружности, или Геометрически, вычисляя обводъ и измѣреніи или діагонали правильнаго полигона имѣющаго превеликое число сторонъ. Симъ способомъ Архимедъ оное содержаніе и нашелъ нѣсколько близко

какъ

какѣ 7 кѣ 22, другїя сыскали какѣ 1 кѣ 3 · 14159265 сѣ прибавкою еще 127 и проч. десятичныхѣ дробей. Мецїусѣ сїе содержанїе опредѣлилѣ какѣ 113 кѣ 355, которое весьма есть близко истиннаго.

318. Посему знавѣ дїаметрѣ круга, для сысканїя величины его окружности, дѣлается (260) сїя пропорцїя; какѣ 113 кѣ 355, такѣ данной дїаметрѣ круга кѣ окружности: но для сыску площади круга, должно (289) половину найденной окружности помножить радїусомѣ, а для сектора, умножь половину его дуги радїусомѣ (291).

319. Ежели на ипотенузѣ и на бокахѣ прямоугольнаго △ ABC (ф. 87) напишется по полукругу, тогда сумма лунокѣ AECG, BFCH равна есть треугольнику ABC.

Доказ. Понеже (213, 299) сумма полукруговѣ AEC, CFB равна полукругу AGHB, и такѣ буде отѣ онаго полкруга вычесть общїя части CHB, AGC останется лунка EG сѣ FH равна площади треугольника ABC.

Слѣдст. Ежели прямоугольной △ ABC будетѣ изоссель, тогда изѣ C опущенной перпендикулярѣ CK раздѣлитѣ его на два равныя треугольника и оныхѣ каждой своей лункѣ равенѣ учинится.

Сїи лунки называются Ипократовы, по тому что оной древнїй Геометрѣ первѣе всѣхѣ нашелѣ способѣ ихѣ квадратовать, то есть какѣ ихѣ площадь измѣрять.

веди CF паралельную къ AB. На BE означа полкруга, изъ F· воставь перпендикуляръ FG: говорю равнобочной △ линѣи BG равенъ есть данному △ ABC.

Доказ. Ибо (212) BG по сочиненїю есть средняя пропорц. между BE, BF. По сему (281) △ линѣи BE : △ линѣи BG :: BE : BF или какъ EH : CI, а умножа послѣднѣе содержанїе чрезъ $\frac{1}{2}$ AB будетъ △ BE: △ BG :: EH × $\frac{1}{2}$ AB : CI × $\frac{1}{2}$ AB; но сїи произведенїи равны площадямъ треугольниковъ ABE, ABC, то для равности предъидущихъ членовъ будетъ △ BG = ABC.

313. XI. Сколько нибудь подобныхъ полигоновъ a, b, c, d, (ф. 85) въ одинъ сложить.

Рѣш. Начерти прямой уголъ HBI, отъ B положа BA = a, BC = b проведи AC. Положа AC отъ B до D, и BE = c проведи DE. Отмѣтя DE отъ B до F, и BG = d, означь FG, то на оной линѣе начерченой полигонъ равенъ есть суммѣ подобныхъ ему полигоновъ здѣланныхъ на линѣяхъ a, b, c, d. Доказ. сего явно отъ сочиненїя и отъ (213 и 298).

Примѣч. 1е. Ежели потребно сколико нибудь разновысокихъ треугольниковъ сложить въ одинъ, или одинъ изъ другова вычесть, тогда надлѣжитъ О учинить (305) одной высоты, и проч. 2е.

2 е.) Ежели слагаемыя полигоны разнообразны, тогда надлежитъ ихъ превратить въ треугольники, а оныя треугольники въ квадраты и проч.

314. XII. Какой ни есть полигонъ изъ другова вычесть.

Рѣш. Ежели они подобныя, тогда на одной сторонѣ, какъ LC (ф. 43) большаго полигона начертя полкруга, положи CE равную сходственной сторонѣ меньшаго, то проведенная хорда EL будетъ (214) сходственной бокъ за вычетомъ остальнаго тѣмъ подобнаго полигона.

315. XIII. Изъ разныхъ двухъ фигуръ A, B здѣлать третью L чтобъ оная равна была фигурѣ B, а подобна фигурѣ A (ф. 86).

Рѣш. Фигуру A преврати (294) въ прямоуг. CE, а треуг. B въ прямоугольн. DH на линѣе DE. Потомъ между CD и DG найди (241) среднюю пропорц. IK, на которой начерченная (257) фигура L подобная фигурѣ A будетъ равна площадью данной фигурѣ B.

Доказ. Подобныя фигуры A, L суть (298) какъ CD□ : IK□ то есть въ удвоенномъ содержанїи съ CD, IK. Но по сочин. ÷ CD . IK . GD, и тако CD : DG въ удвоенномъ же содержанїи противъ CD : IK,

+ изъ коихъ отнявъ общей △ ADG останутся равныя части AGF, DGE, а изъ оныхъ одну AFG отъ половины ABE отнявъ, а другую DGE къ остатку придавъ, выдетъ △ BDF $=$ BAE $= \frac{1}{2}$ ABC.

Ежели потребно △ ABC (ф. 91) раздѣлить на три равныя части отъ данной точки D, тогда основанїе раздѣля на 3 равныя части, въ E, F, проведи къ AD паралельныя EG, FH, потомъ DG, DH. Доказат. сему есть тоже съ прешедшимъ.

IV. Въ △ ABC (ф. 92) сыскать такую точку, отъ которой въ углы проведенныя линѣи раздѣлили бы △ на три равныя части.

Рѣш. Изъ третьей части основанїя, проведи DE паралельно къ AB, тогда изъ F средины черты DE, проведѣнныя линѣи въ углы раздѣлятъ △ ABC по задачѣ.

Доказ. Ибо по сочин. △ ALD $= \frac{1}{3}$ ALC и (272) $=$ △ AEF, притомъ для паралельныхъ AB, DE и что DF $=$ FE, △ AEF $=$ BDF: но △ DFC $=$ CEF, то по сему △ AEF $+$ CEF $=$ BDF $+$ DFC, или AFC $=$ BFC.

V. Отъ данной точки D въ △ ABC (ф. 93) раздѣлить оной на три части равныя.

Рѣш. Отмѣтя BE $= \frac{2}{3}$ BC, проведи DE,

и къ

и къ оной означа паралельно AF, соедини DF, тогда фигура ADFB равна будетъ △ ABE то есть $\frac{2}{3}$ ABC. Потомъ для раздѣленія пополамъ фигуру ACFD, изъ G средины линѣи AF проведи GH паралельно къ DC: на конѣцъ проведенная черта DH раздѣлитъ пополамъ фигуру ACFD.

Доказ. Проведя DG, GC явно (272) △ AGC = FGC и △ AGD = FGD. Но для паралельныхъ, △ GDO = OCH; и по сему фигура FGDHC = GDHA, изъ коихъ выключая равныя AGD, FGD останется четыреугольникъ FCHD равенъ △ ку ADH.

VI. Треугольника BCA (ф. 94) изъ угла B проведенною линѣею отдѣлить часть равную данному △ ку CDE.

Рѣш. Здѣлай △ ICH (306) = CDE, соединя BH проведи къ оной паралельную IG. По томъ означь EG, тогда △ BCG = ICH = CDE. Сїе явно есть отъ прешед.

VII. Въ треугольникѣ BCA (ф. 95) провесть линѣю NM паралельно къ BC такъ, чтобъ △ ANM равенъ былъ данному CDE.

Рѣш. Высотамъ CP, EG и основанїю CD найди (240) четвертую пропорц. AQ. По томъ (241) между оной AQ и AB, среднюю

ленїю площадь ABF выдетъ болѣ △ AFC, тогда для равныхъ частей PFD, PGK слѣдуетъ разность тѣхъ площадѣй помѣстить въ фигурѣ AEKG, и оную вычтя изъ △ HGA останется площадь въ △ HKE, а посредствомъ оной найдется HE, EA, и чрезъ то опредѣлится положенїе линѣи EFD.

Примѣч. Ежели по исчисленїю площадь △ ABF явится меньше площади △ AFC или меньше заданной, тогда показанное дѣйствїе должно произвесть по другую сторону линѣи AF. будеже PF болѣ AP, тогда вмѣсто линѣи APF проводится иная по разсужденїю изъ ∠ C или B. такимъ же способомъ раздѣляется △ по какой нибудь данной, токмо не превосходящей его, площади.

XIV. Данной паралеллограмъ ABCD (ф. 104) на три равныя части раздѣлить линѣями проведенными изъ данной точки E.

Рѣш. Линѣю AB раздѣли на три равныя части въ точкахъ F, G. Означа FH паралельно къ AD, положи HI = EF, и проведя EI будетъ для равныхъ треугольн. EFN, HIN, фигура AEID = AFHD то есть = $\frac{1}{3}$ цѣлой. Такимъ же образомъ проведенная линѣя EL отдѣлитъ площадь EBCL = $\frac{1}{3}$ всея площади ABCD.

XV. Данной полигонъ ABCD, (ф. 105) изъ средней точки E линѣи AB пополамъ раздѣлить.

Рѣш.

Рѣш. Проведя EC, и къ AB паралельную DF, изъ средины G назначь паралельно GH къ линѣе EC. Наконецъ соедини EH, коя раздѣлитъ фигуру по заданїю.

Доказ. Ибо проведя EG, GC, для равныхъ и паралельныхъ, отъ сочиненїя AE, BE и DG, GF площадь AEGD = EBFG и (272) △ DGC = GFC, по сему фигура AEGCD = EBCG, а для △ EGO = OHC и фирура AEHD = EBCH.

XVI. Полигонъ ABCD (ф. 106) линѣею изъ угла B проведенною пополамъ раздѣлить.

Рѣш. Проведя дїагонали BD, AC раздѣли AC пополамъ въ E. Изъ E проведя EF паралельно къ BD, соедини EF, коя раздѣлитъ фигуру ABCD по заданїю.

Доказ. Понеже (272) △ ABE = △ EBC и AED = EDC, по сему площадь ABED = BCDE: но для паралельныхъ BD, EF, △ BGE = △ DGF, и тако площадь ABFD = площади △ ка BCF.

Какъ сїе такъ и удѣлъ какой ни есть данной площади можно удобнѣе учинить чрезъ нижепоказанное генеральное рѣшенїе въ задачѣ XXI.

XVII. Полигонъ ABCD (ф. 107) отъ данной точки E, на сколько нибудь равныхъ

раздѣля AB пополамъ въ E проведи DE, оная будетъ $\sqrt{(ab + \frac{1}{4}aa)}$. По томъ положи EO = ED и выдетъ $AO = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}aa)} + \frac{1}{2}a = x = AE$.

X. При данномъ ∠ ZAX (ф. 99) отъ положенной точки B провесть линѣю BE которая бы здѣлала △ AEG равенъ данному T.

Рѣш. Изъ точки B, означь BN паралельно къ AX, и отъ оной же проведи BK, такъ чтобъ (З. VIII) △ BKN = T; потомъ на линѣе NZ опредѣля точку E, дабы (приготовл.) ∺ NK. AE. NE проведи EB, и будетъ △ AEG = △ ку T.

Доказ. Ибо (277) площади треугольниковъ EBN, KBN между собою какъ ихъ основанїи NE, NK. Но ∺ NE. AE. NK, по сему △ EBN: KBN :: NE□: AE□. А понеже для паралел. AX, EN, △ EBN: EGA :: NE□: AE□, и отъ равности содержанїи, △ KBN = EGA, то есть T = EGA.

XI. Раздѣлить △ ACB, на три равныя части отъ внѣшней точки O (ф. 100)

Рѣш. Раздѣля AB на три равныя части въ E, F проведи CE, CF, кои раздѣлятъ △ ACB на три равныя доли; по томъ здѣлай (З. X) △ ARS = AEC, и BVD = томужъ.

Также

Также раздѣляются треугольники и въ данныхъ содержаніяхъ, что отъ раздѣленія линѣи AC зависитъ: притомъ ежели точка O будетъ на продолженной AB, тогда отдѣли △ DRC = ACF и проч. (ф. 101).

XII. Данъ △ ABC и на боку AC точка D, провесть прямую линѣю IDH что бы △ BHI равенъ былъ △ BCA (ф. 102)

Рѣш. Назначь DE паралельно къ AB, а EF къ AC и FG къ BC: потомъ чрезъ G проведи AH, а наконецъ HDI, и будетъ △ ADI = △ ку CDH.

Доказ. Продолжа FG до K будутъ треугольники FGE, GKD подобныя, по сему EG : GD = FG : GK. Но EG : GD = BA : AI = △ BAH : △ AIH, и FG : GK = BH : HC = △ BAH : △ CAH. Слѣд. △ BAH : △ AHI = △ BAH : △ CAH, и отъ равности предвидущихъ будетъ △ AHI = △ CAH, а приложа къ онымъ △ BAH выдетъ △ BHI = △ BCA.

XIII. Данной △ ABC (ф. 103) раздѣлить равно пополамъ по линѣе ED чрезъ назначенную точку P проведенной.

Рѣш. Проведя черту APF, отмѣть на нѣй PG = PF, и чрезъ G назначь HL паралельную къ BC. Потомъ, буде по вычисленію

пропорц. AN, и чрезъ N проведи NM паралельно къ BC.

Доказ. Понеже CP : EG :: CD : AQ, и тако CP × AQ = EG × CD, по сему и △ AQC = CDE. Но (281) △ ABC : ANM :: AB□ : AN□, или по сочиненїю какъ AB : AQ или (277) какъ △ BAC къ △ AQC; то есть къ данному △ CDE; по сему △ ANM = CDE.

VIII. При данномъ ∠ ZAX (ф: 96) на линѣе AD здѣлать △ ADS равной △ HPI.

Рѣш. Проведи перпендик. IQ и тремъ линѣямъ AD, HP, IQ сыскавъ четвертую пропорц. изъ A воставь ея перпендикулярно на AD какъ AT. Чрезъ T проведя паралель TS къ AD соедини SD, будетъ △ SAD = HIP. Ибо (279) △ HPI = △ ADT; потому что ихъ основанїи къ высотамъ обратно пропорцїональныя, а △ DAT = ADS (272).

Иначе. Вымѣрявъ по мастабу основанїе HP и высоту IQ треугольника HIP найди въ ономъ площадь, которую раздѣля на половину линѣи AD, квотусъ будетъ высота AT, а остатокъ дѣла соверши попрежнему.

IX. Въ данномъ △ ABC (ф. 97) сыскать точку O, отъ которой бы проведенныя линѣи паралельно къ бокамъ AB, BC, какую нибудь часть треугольника отдѣлили. Рѣш.

Рѣш. Для отдѣлу половины: между BG, и GH половины перп. BG сыщи среднюю пропорц. GI, чрезъ I проведя RS паралельно къ AC раздѣли ея пополамъ въ O, изъ O проведенныя DO, OF паралельно къ AB, BC включатъ △ DOF = $\frac{1}{2}$ △ ка ABC.

Доказ. Ибо отъ сочиненія треугольники DOF, ABC подобныя, и (281) △ DOF : ABC :: GI□ : GB□, или GH : GB. Но GH = $\frac{1}{2}$ GB, по сему и △ DOF = $\frac{1}{2}$ △ ABC.

Ежели потребно чтобъ △ DOF былъ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и проч. треугольника ABC, тогда среднюю пропорц. GI, должно искать между GB и $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и пр. части линѣи GB, а остатокъ дѣйствія совершить попрежнему.

Пріуготовл. Даннымъ двумъ линѣямъ NK, NA (ф. 98) определишь AE такъ, чтобъ оная была средняя пропорціональная между NK и NE.

Рѣш. Положа NK = a, NA = b, AE = x, будетъ ÷ NK. AE. NE; или ÷ a. x. b + x, и тако $xx = ab + ax$ и $xx - ax = ab$: но $xx - ax + \frac{1}{4}aa = ab + \frac{1}{4}aa$, или $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}aa)}$; по сему $x = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}aa)} + \frac{1}{2}a$.

Сочин. Положа AB = a, BC = b воставь средн. пропорц BD, которая будетъ $\sqrt{ab}$:

раздѣля

ныхъ частей раздѣлить, положимъ сперва пополамъ.

Рѣш. Данную фигуру (294) преврати въ △ AFD, котораго основанїе AF раздѣля пополамъ въ G, соедини EG, и къ оной здѣлавъ паралель DH, проведи EH.

Доказ. Ибо треугольники AGD, FGD равныя, и для равныхъ частей HGO, OED, △ GAD равенъ фигурѣ AHED, то есть половинѣ полигона ABCD.

Примѣч. Ежели потребно раздѣлить на 3, 4, 5 и проч. равныя части, тогда часть AG берется за $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и проч. линѣи AF, и EH отдѣлитъ такую же часть фигуры, а остатокъ раздѣляется превращая его въ треугольники; токмо буде раздѣляющая линѣя EH придетъ на CB, въ такомъ случаѣ приведенїе фигуры въ △ дѣлается съ противной стороны, а раздѣленїе четыреугольника пополамъ показано въ задачѣ XVI.

Такимъ же способомъ раздѣляются всѣ полигоны на сколько нибудь равныхъ частей, или по данному содержанїю ихъ площадей линѣями изъ одного или изъ многихъ угловъ проведенными.

XVIII. Полигонъ ABDC (ф. 108) раздѣлить пополамъ линѣею паралельною къ которой нибудь сторонѣ, какъ AD.

Рѣш. Данной полигонъ преврати въ △ AED, и продолжа стороны AB, DC пока сойдутся въ G, раздѣли основанїе AE пополамъ

поламъ въ F, и между GA, GF сыщи среднюю пропорціональную GH, а изъ H проведи HI паралельно къ боку AD.

Доказ. Отъ сочиненія △ AED равенъ фигурѣ ABCD, по сему и половины ихъ AFD, FBCD равныя. Но (281) △ ADG : HIG :: AG□ : GH□, или по сочиненію для ∺ AG · GH · GF, какъ AG : GF, или (277) какъ △ GAD : GFD, и отъ равности предвидущихъ будетъ △ HIG = GFD, изъ которыхъ выключа общей △ BGC, останется фигура HBCI = FBCD, и проч.

Ежели потребно оной же полигонъ раздѣлить паралельными линѣями къ AD на 3, 4, 5, и проч. равныхъ частей, или по содержанію ихъ площадей, тогда AF берется за $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ часть основанія AE, и между GA и GF ищется средн. пропорціон. GH, и по сему HI отдѣлитъ $\frac{1}{3}$ и проч. полигона, потомъ остальныя фигуры превращая каждую въ △ равныхъ образомъ раздѣляются на желаемыя части.

XIX. Какой ни есть полигонъ правильной или неправильной раздѣлить на сколько нибудь равныхъ частей, или по данному содержанію ихъ площадей отъ точки опредѣленной на обводѣ полигона. Положимъ на примѣръ раздѣлить полигонъ отъ данной точки O (ф. 109) на три части въ данномъ содерж. какъ линѣи ab, bc, cd.

Рѣш. Раздѣля полигонъ въ треугольники, отъ точки О превращи (305) ихъ къ одной высотѣ. Потомъ раздѣли (239) линѣю ad на 5 частей по содержанїю основаней тѣхъ превращенныхъ треугольниковъ въ q, r, s, t. Но понеже вторая часть qr, раздѣляется въ b, того ради второе основанїе FE раздѣля (239) FZ : ZE = qb : br, проведи ZO, и будетъ фигура AFZO къ цѣлой какъ ab къ ad. На конецъ четвертая часть st пересѣчена второю ac, по сему основанїе DC четвертаго △ ка раздѣля такъ, sc : ct = DX : XC проведи XO, и будетъ фигура ZEDXO къ цѣлой какъ bc къ ad.

Доказ. По сочиненїю △ FOE, къ цѣлой фигурѣ, какъ qr къ ad или перемѣня, △ FOE : qr какъ цѣлая фигура къ ad. Также отъ сочиненїя △ ZOE : ZOF :: br : bq, слагая есть FOE : ZFO :: qr : qb, перемѣня сїю пропорцїю будетъ FOE : qr :: ZOF : qb, и по тому FOZ къ qb какъ цѣлая фигура къ ad; перемѣня оную выдетъ FOZ къ цѣлой фигурѣ какъ qb : ad; но △ AOF къ той фигурѣ какъ aq : ad, по сему AOF + FOZ то есть AFZO къ цѣлой фигурѣ какъ aq + qb или ab къ ad. Также

докажет-

докажется что часть XCBO къ цѣлой какъ cd къ ad.

Примѣч. Ежели надобно полигонъ раздѣлить на три равныя части, тогда линѣя ad дѣлится въ b, c на равныя части, а прочее съ показаннымъ есть одинакое дѣйствїе.

XX. Чрезъ данную точку P (ф. 110) провесть линѣю FPG, коя бы раздѣлила полигонъ ABCDE на двѣ равныя части, или отдѣлила бы площадь GCBF равную данной площади.

Рѣш. Проведя BPI вычисли площадь BCDI, и буде оная меньше половины цѣлой фигуры, или заданной площади, то проведи DPK, и ежели площадь BCDK явится также меньше половины, а проведенная APH, отдѣлитъ фигуру ABCH болѣ половины, въ такомъ случаѣ линѣя GPF должна пройти между A и K. Того ради (ежели PD меньше PK) положи PL = PD, и чрезъ L проведи LN паралельно къ DC. Потомъ вычисля площадь NKL, сложи ея съ площадью FKLO, то есть съ равностью между половины, либо данной площади и BCDK, сумма равна будетъ △ ку NFO. На конецъ чрезъ P проведи (З. X) линѣю POF, помѣщающую площадь △ ка NFO, и тако для

 равныхъ

равныхъ треугольниковъ DGP, POL фигура GCBF будетъ половина цѣлыя фигуры или равна данной площади.

Примѣч. Ежели DP придетъ болѣ части PK, тогда въ мѣсто черты DPK проводится иная по разсужденію изъ другаго угла предложеннаго плана.

XXI. Всякаго данного полигона отъ опредѣленной точки O (ф. 109) вправо отдѣлить площадь данной величины въ какихъ нибудь квадратныхъ мѣрахъ.

Генер. рѣшеніе. Раздѣля полигонъ отъ точки O въ треугольники, спусти въ оныхъ перпендикуляры Be, Cf и проч. и оныя съ ихъ основаніями OC, OD и проч. измѣря по мастабу, вычисли (273) каждаго △ ка площадь, и сложа всѣ въ одну сумму найдется площадь цѣлой фигуры. Потомъ смотри по сношенію данной площади съ площадью одного, или двухъ и проч. треугольниковъ, въ которомъ △ къ раздѣляющая линѣя какъ OX пройти долженствуетъ. Напримѣръ, чрезъ сіе сравненіе сыскалась данная площадь больше △ OCB, а меньше двухъ OBC + OCD, по сему линѣя OX должна пройтить въ △ OCD. И тако изъ данной площади вычтя площадь △ OBC, останется площадь въ △ OCX, котораго

сыскавъ

сыскавъ высоту (273) (удвоенную его площадь раздѣля на величину линѣи OC) и взявъ ея съ тогоже масштаба назначь къ линѣе OC, паралель IK, пересѣкающую CD въ X. Наконецъ проведи OX, и будетъ площадь фигуры OBCX равна данной. Сїе явно есть отъ сочиненія.

Ежели потребно въ какомъ нибудь данномъ полигонѣ какъ AECD (ф. 108) помѣстить площадь знаемой величины линѣею къ одной сторонѣ паралельною, какъ IH. тогда продолжа стороны AB, DC, пока сойдутся въ G, вымѣряй по масштабу спущенной перпендикуляръ изъ точки A въ треугольникѣ AGD, на линѣю DG, потомъ (273) найди онаго площадь, изъ которой вычтя данную здѣлай сїю пропорцїю: площадь △ ADG къ оставшей за вычетомъ, какъ квадратъ линѣи DG къ квадратному числу, котораго сыскавъ радиксъ, возьми съ масштаба и положи отъ G до I. И такъ проведенная линѣя IH, раздѣлитъ данную фигуру по заданїю; Ибо треугольники ADG, HIG отъ сочиненія подобныя, и проч.

рѣшенїе сея задачи названо генеральнымъ потому, что оное во всѣхъ случаяхъ земледѣленія скоряе и съ лучшею точностью, нежели чертежемъ бываетъ

 употреби-

употребительно; и для того еще нѣсколько задачь также вычисленіемъ рѣшимыя предлагаю.

XXII. Двоимъ отведено прямоугольное мѣсто какъ ABCD, (ф. 111) мѣрою длиннику AB, 34 саж. а поперѣшнику AD, 32 саж. и хотятъ они раздѣлить оное пополамъ по межѣ EF паралельной длинѣ AB, оставя на общей проѣздъ мѣсто BH въ 4 саж. шириною. Сыскать дороги длину BF и проч.

рѣшеніе

AB = 34 саж. AB = 34
AD = 32 BI = 2
1088 площ. AC 32 = AI
½ 544 площ. AK, 32 (544) 17 = BF
полагая HI = FI. CI — GI = 30 = AG

площадь AH или EC = 510 саж. □.

XXIII. Четыреугольное полѣ ABCD (ф. 112) раздѣлить пополамъ прямою межою GH паралельною къ боку AB.

рѣш. Проведя CE паралельно къ AB и DF къ BC, смѣрей AB = 15, EF = 2, FC = 7.

А понеже △ AIK : △ ECK = AB□ : EC□

и △ ECK : △ DCK = ED : DK

или = CE : CF

По сему △ ABK : △ DCK = AB□ : CE × CF

CF. Слѣдоват: треугольники ABK, GHK, DCK между собою какъ AB□; GH□, CE×CF.

Но $\frac{1}{2}$ (△ ABK − △ DCK) = △ HGK − △ DCK, то есть △ ABK + △ DCK = 2 △ HGK; по сему AB□ + CE×CF = 2 GH□ = 288. Слѣдов. $\frac{1}{2}$ (AB□ + CE×CF) = HG□ = 144, а GH = 12. Сыскавъ длину мѣжи HG отмѣряй на боку AB разстояніе AI = HG, и проведя IH паралельно къ AD найдется точка H, и проч.

Примѣч. Когда CD = BA, тогда прямоуг. ECF = CE□ = CD□; но GH□ = AB□ + CD□, того ради GH = √ (AB□ + CD□).

сію задачу весьма лехче можно рѣшить генеральнымъ правиломъ показаннымъ въ задачѣ. XXI.

XXIV. Четыреугольной планъ ABCD (ф. 113) надобно раздѣлить пополамъ по прямой линѣе HI перпендикулярной къ AD.

рѣш. Опустя перпендикуляры BE, CF, продолжи BC до G, и послѣ смѣрей AE = 13 EF = 9, FG = 5, GD = 8.

Изъ AG×GE = 378 вычти FG×GD = 40, остатокъ 338 раздѣли пополамъ и выдетъ 169 = HG□, посему HG = 13, и проч.

Иначе, въ $\triangle$ CDG по вымѣренной высотѣ CF и основанїю GD сыщи площадь, кою вычти изъ половины площади всея фигуры, останется площадь въ $\triangle$ HGI: потомъ $\triangle$ GFC : $\triangle$ GHI : : FG$\square$: GH$\square$, и проч.

XXV. Трапезїю ABCD (ф. 114) надобно раздѣлить пополамъ по прямой линѣе FE паралельной боку DC, оставя общее мѣсто BGHF шириною BM = 8 саж. а по обмѣру AB = 80 с, BE = 55 с. CD = 65 с. AD = 130 с, сыскать гдѣ придетъ точка E на линѣе AD.

рѣш. Проведя BI паралельно къ CD и BK прямостоино къ AD, найдется въ $\triangle$ ABI высота BK = 56 саженямъ.

Потомъ BK (56) : AI (75) : : BM (8) : GL = $10\frac{5}{7}$. Съ AD + BC = 185 сложи GL, $10\frac{5}{7}$ выдетъ $185\frac{5}{7}$ = GH + FC + AD. Но AGHE = DCFE, а высота MK = 48, по сему (GH + AE) × 48 = (CF + DE) × 56, или GH + AE : CF + DE = 56 : 48. а GH + AD + CF : CF + DE = 56 + 48 : 48 = $195\frac{5}{7}$: CF + DE, то есть 104 : 48 = $195\frac{5}{7}$: 2 CF или 2 DE = $90\frac{1}{3}$, и тако DE = почти $45\frac{1}{6}$ саж.

XXVI. Четыреугольникъ ABCD (ф. 115) раз-

раздѣлить пополамъ линѣею FE паралельною къ AB, оставя общую площадь BH шириною въ 10 саж. считая по линѣе AB. A смѣрены AB = 110 с. AI = 105 с. ID = 45 с. и IC, 75 с. паралельная къ AB.

Рѣш. Положа BL = 5 с. назначь LMN паралельно къ BC, и вычисляй слѣдующимъ образомъ.

AB = 110	AB = 110	AB = 110	CI = 75
CI = 75	LB = 5	CI = 75	DI = 45
185	AL = 105	KB = 35	3375 =
105			△ ICD.

19425 = ABCI
3375
22800 = ABCD
11400 = ALME

KC = 105
KB = 35
площ. 3675 △ KBC.

Потомъ KB : KC :: AL : AN, то есть 35 : 105 :: 105 : 315 = AN

105 = AL
33075 = ALN
11400 = ALME
21675 = EMN.

На конѣцъ KBC, 3675 : KC□, 16525 :: EMN, 21675 : EN□ 65025; по сему EN = 255

$= 255$, и $AN - EN = 315 - 255 = AE = 60$, что надлѣжало сыскать, а остатокъ дѣла собою очевиденъ.

---

321. Пополненіе къ планиметріи.

I. Доказ. (на N. 282) Здѣлавъ на сторонахъ треугольника. ABC (ф. 116) квадраты, изъ A на CB опусти перпендик. AIL, кой раздѣлитъ квадратъ CD на два прямоугольника CL, ID. Проведя линѣи BH, AE будетъ (134) △ ACE = BCH; ибо въ △ ACE стороны AC, CE равны сторонамъ CB, CH въ △ BCH, и еще ∠ ACE = ∠ BCH: по тому что въ обоихъ по прямому съ общимъ угломъ ACB; но оныя треугольники суть (271) половины фигуръ AH, EI, по сему квадратъ AH = прямоуг: CL.

По такому же доказательству выдетъ что AF□ = прямоугольнику LB.

Иначе. Приготовя все какъ показано въ ф. 117, будетъ (272) прямоугольн. BESA равенъ квадрату AF, и прямоугольн. ACDS равенъ квадрату AH, а △ ESD = △ ABC, по сему AF□ + AH□ = BD□.

Сія славная Теорема (древнимъ Геометромъ Архимедомъ изобрѣтенная) для любопытныхъ читателей

лей пятью разными видами здѣсь доказана, и оная въ Геометрїи и въ Аналитикѣ весьма употребительна.

II. для превращенїя даннаго прямоуг. какъ ABCD (ф. 61) въ иной по данной длинѣ, надлежитъ продолжить бокъ DC, и положа CG = данной длинѣ, проведи линѣю GBF, то будетъ AF искомая ширина AF (207 и 194). Сїе къ N. 315.

III. таблица показующая мѣру перпендикуляровъ или апотемъ и площадей правильныхъ полигоновъ.

имена полигон.	перпенд.	площади
пятиугольникъ.	0. 688191	1. 7204774
семиугольникъ.	1. 038260	3. 6339124
осьмиугольникъ.	1. 207107	4. 8284272
дѣвятиугольн.	1. 373739	6. 1818241
дѣсятиугольн.	1. 538842	7. 6942087
одиннатцатиуг.	1. 702844	9. 3653412
двѣнатцатиуг.	1. 866026	11. 1961524

употребленїе сея таблицы состоитъ въ слѣдующемъ, въ сочиненїи ея (о коемъ показано въ тригонометри) положена сторона каждаго полигона = 1 единицѣ: по сему (298) ежели квадратъ одной стороны какова ни есть полигона умножить площадью взятою изъ табл. такой же фигуры, произведенїе будетъ площадь даннаго полигона. А буде сторона нѣкоего полигона умножится на перпенд. такова же полигона по таблицѣ, то выдетъ апотемъ въ заданномъ полигонѣ. Сїе къ N. 297.

IV. (къ 284) площадь полосы, коя одинакой ширины, какъ въ фиг. 118, находится равно какъ показано въ n. 284: а имянно полсумму всѣхъ внутренниxъ и внѣшниxъ сторонъ должно умножить шириною.

V.

V. для сысканія площади въ смѣшеннолинѣйномъ планѣ (ф. 119) надлежитъ разумно сравнивать криволинѣйную площадь въ прямолинѣйную. ибо дугу можно привести въ двѣ, три и въ прочія прямыя линѣи: такимъ образомъ прямолинѣйная фигура ABCD съ довольною точностію здѣлается равна смѣшеннолинѣйному плану. А прочія криволинѣйныя фигуры можно измѣрять посредствомъ частей круга.

VI. что всякая паралельная какъ EF въ △ ABD (ф. 90) сѣчетъ стороны пропорціонально, можно доказать кромѣ N. 206 чрезъ N. 277.

увѣдом. планометрическихъ задачь здѣсь болѣ положить почелъ я за излишнее; ибо читатель разумѣя предписанныя правила кромѣ что узнаетъ причину показанныхъ вычисленіи въ Арифм. въ части IV. въ главѣ. III, но и всякія иныя задачи рѣшить и самъ изобретать можетъ.

* *

О свойствахъ плоскихъ поверхностей или плоскостей.

доселѣ начертаніе всѣхъ линѣй и фигуръ съ ихъ пространствами движеніемъ точекъ и линѣй описанными представляли на плоскости, и сіе съ начала неминуемо за основаніе положено было (17); а теперь Геометрическое происхожденіе и изображеніе оной плоскости показую тако;

322. помыслимъ что линѣя ZC лежитъ въ воздухѣ, и къ оной перпендикулярна безконечная прямая CR (ф. 120); и будто линѣя ZC сама собою не сходя съ мѣста съ перпендикуляромъ CR вокругъ оборотится, тогда ясно поймемъ что CR опишетъ плоскую поверхность HHHRRR, или планъ то есть плоскость прямостоящую къ линѣе ZC.

Тоже самое можно показать механически обращая наугольникъ около неподвижной какой ни есть прямой линѣи.

323. Ежели одна линѣя на другой не прямо стоитъ, то описанная ею фигура не будетъ плоскость. на примѣръ есть ли повернуть прямую MN (ф. 121) съ линѣею MB составляющею въ M острой уголъ NMB, то легко можно видеть что линѣя MB опишетъ кругловатую поверхность снаружи выпуклую шпицомъ, а внутри вогнутую, на которой всюду прямыхъ, коихъ бы точки касались сію поверхность ни какъ провесть невозможно.

Слѣдст. плоскость есть такая поверхность, коей всякая точка прямой на ея вездѣ полагаемой касается. Изъ того явствуетъ,

324. I. Прямая линѣя положенная на плоскости не можетъ на оной быть отчасти, то есть чтобъ одна часть линѣи поднелась выше или опустилась ниже плоскости.

325. Слѣдст. Iе. буде двѣ точки прямой лежатъ на плоскости, то тамъ и вся линѣя.

326. IIе. Одна плоскость A не можетъ отчасти точно лежать на другой плоскости, и отчасти вверьхъ поднета или внизъ опущена, но взаимно наложенны соединяются. Ибо тогда прямая линѣя положенная на плоскость A, можетъ быть отчасти на плоскости B, а отчасти поднета къ верьху или опущена внизъ, чему статися нельзя.

327. IIIе. всѣ прямыя въ концѣ или въ одной точкѣ къ нѣкоторой линѣи перпендикулярны, находятся въ одной плоскости (322).

328. II. Три точки не въ прямой линѣе лежащія положеніе плоскости опредѣляютъ.

Доказ. Ежели положить плоскость на сколько нибудь точекъ сущихъ въ прямой линѣе, тогда всѣ оныя точки зделаютъ опору около которой та плоскость свободно можетъ вращатися. Но положа плоскость на три точки, кои не въ прямой линѣе то сіи точки зделаютъ опору, на которой плос-

кость

кость уже болѣ не оборотится, и коя вѣ непремѣнномѣ ея удержитѣ положенїи: по сему три точки не вѣ одной прямой линѣе лежащїя положенїе плана или плоскости опредѣляютѣ.

329. Слѣдст. треугольникѣ опредѣляетѣ плоскость и ея положенїе.

330. III. Прямая прямостоящая на плоскости, также перпендикулярна ко всѣмѣ линѣямѣ отѣ конца тоя линѣи по плоскости проведеннымѣ, какѣ ZC (ф. 120) есть перпендикулярѣ ко всѣмѣ линѣямѣ HCR, HCR и проч.

331. IV. Двѣ прямыя прямостоящїя или вѣ одну сторону равнонаклонныя кѣ одной плоскости линѣи между собою паралельныя, и обратно.

332. V. Ежели изѣ двухѣ паралельныхѣ линѣй одна кѣ плоскости прямостояща, то также стоитѣ на ней и другая.

333 VI. буде двѣ линѣи паралельны кѣ третьей, которая сѣ ними не вѣ одной плоскости, также и между собою паралельны.

334. VII. Двѣ прямыя пресѣченныя находятся вѣ одной плоскости, а больше двухѣ пересѣкающихся, на одной плоскости бываетѣ и нѣтѣ (325 и 328).

335. VIII. Три точки не вѣ одной прямой лежащїя не могутѣ быть общїя двумѣ разнымѣ плоскостямѣ: ибо оныя находятся только вѣ одной плоскости, а не вѣ разныхѣ (326).

336. Слѣдст. Пресѣченїе двухѣ плоскостей есть прямая линѣя: ибо сѣченїе двухѣ плоскостей есть прямая линѣя, коей всѣ точки суть общїя обѣимѣ плоскостямѣ.

337. Представимѣ себѣ что на неподвижной прямоугольной плоскости CDEF (ф. 121) лежитѣ другая ей равная. Сїи двѣ плоскости не имѣютѣ ни какой толстоты, и по тому одну плоскость составляютѣ. потомѣ вообразимѣ что будто та плос-

кость

кость на неподвижной линѣе AB (на общемъ сѣченіи пополамъ обоихъ плоскостей) вращается, то ясно окажется. 1е. что движимая плоскость идучи отъ D до C перейдетъ всѣ градусы наклоненія къ неподвижной плоскости. 2е. здѣлается къ той плоскости перпендикулярна, когда ни въ которую сторону не будетъ наклонна. 3е. равныя углы наклоненія размѣряютъ дуги полкруга DdC, точкою D движимой плоскости описаннаго. 4е. когда движимая остановится на примѣръ въ d, то уголъ наклоненія плоскостей AdeB, ADEB есть уголъ dAD, коего стороны суть Ad, AD находящіяся въ обоихъ плоскостяхъ и къ общему сѣченію AB прямостоящія. Притомъ другая половина движимой плоскости AcfB, вращаясь вмѣстѣ съ первою учинитъ тѣже углы наклоненія съ неподвижною плоскостью, какія здѣлались отъ AdeB; и такъ явно что двѣ между собою наклонныя плоскости имѣютъ тѣже свойства, какія есть у двухъ линѣй взаимно наклонныхъ.

338. слѣдст. Iе. уголъ наклоненія двухъ плоскостей есть тотъ между ими уголъ, коего верьхъ находится въ общемъ ихъ сеченіи, а стороны лежатъ на оныхъ плоскостяхъ перпендикулярно тому сѣченію, какъ dAD, opq, eBE. и проч. и всѣ между собою равныя.

IIе. уголъ наклоненія какой нибудь линѣи какъ dA на плоскость есть уголъ dAD, коего одна сторона Ad, а другая AD чрезъ O конецъ перпендикуляра dO изъ d на плоскость опущеннаго проведенная (ф. 122).

339. IX. плоскость стоящая на другой дѣлаетъ съ нею два угла прямыя, или двумъ прямымъ равныя.

340. X. въ пресѣченіи двухъ плоскостей противолежащія угла между собою равныя.

341. XI. сумма угловъ взаимнаго наклоненія

сколькихЪ нибудь плоскостей коихЪ общее перѣсеченіе есть вЪ одной линѣе, равна 360 градусамЪ.

342. XII. разстояніе точки до плоскости есть перпендикулярЪ отЪ оной точки на плоскость проведенны. отЪ точки внѣ плоскости кромѣ одного перпендикуляра на нея опустить не можно. Также изЪ точки плоскости только одинЪ на нея перпендикулярЪ воставляется.

343. XIII. плоскость сѣкущая двѣ или многія между собою паралельныя плоскости, дѣлаетЪ также наружно и внутренно алтерныя углы равныя, и обратно.

344. XIV. Пресеченіи двухЪ или многихЪ паралельныхЪ плоскостей иною, суть линѣи паралельныя: ибо ежели онѣ не паралельныя, то могутЪ сойтись, по тому и плоскости ихЪ также сойдутся, и не будутЪ паралельныя.

345. XV. когда одна линѣя кЪ двумЪ разнымЪ плоскостямЪ перпендикулярна, тогда оныя плоскости между собою паралельныя. Ибо оная линѣя размѣряетЪ растояніе паралельныхЪ плоскостей.

346. XVI. Ежели общее сѣченіе двухЪ плоскостей кЪ третьей перпендикулярно тогда и плоскости оныя стоятЪ кЪ сей перпендикулярно.

347. зад. I. изЪ точки D (ф. 122) внѣ плоскости X на оную перпендикулярЪ опустить.

рѣш. проведя линѣю BC на той плоскости изЪ точки D (64) спусти перпенд. DA. По томЪ изЪ A кЪ линѣе BC по тойже плоскости, воставя перпенд. AE. наконецЪ кЪ оной линѣе изЪ D опущенной перпендикулярЪ DO будетЪ и кЪ данной плоскости X.

Иначе. Проведи на плоскости (ф. 123) какЪ нибудь двѣ линѣи на примѣрЪ AB, CD. Поставя конецЪ циркуля на точку D, другимЪ расстворя до E пересеки тѣ линѣи вЪ точкахЪ F, G. ПотомЪ около

трехЪ

трехъ точекъ E, F, G очерти (100) кругъ, и къ центру онаго O проведи DO.

348. II. изъ данной точки M въ плоскости X, на оную перпендикуляръ воставить (ф. 124).

рѣш. изъ какой нибудь внешней точки какъ D опусти (347) на плоскость X перпенд. DO, по томъ къ оному и къ точке M приложа плоскость веди по ней линѣю MN паралельно къ OD.

для механическаго рѣшенїя оныхъ задачь надлежитъ имѣть мѣдной наугольникъ (ф. 126) или здѣлать изъ палетуры прямоугольникъ DEFG, (ф. 127) которой раздѣли пополамъ прямою AB и въ оной линѣе его перегни. и тако буде сей двойной наугольникъ поставится на плоскости Z (ф. 128) то его перегибъ AB къ оной по сочиненїю будетъ перпендикуляренъ (330). посему ежели требуется на плоскость Z воставить изъ точки A или опустить изъ точки H перпендикуляръ, тогда оной наугольникъ двигая поплоскости Z пока перегибъ AB коснетъ данную точку A или H, тогда AB будетъ искомой перпендикуляръ.

для поставленїя на какую нибудь линѣю какъ KL плоскости перпендикулярно къ плоскости Z, положи на данную линѣю край AD половины наугольника, тогда плоскость оной ADGB будетъ прямостоящая на плоскости Z.

349. Ежели наложить третью плоскость на точки F, B, G тогда оная (327) перпендикулярна будетъ линѣе AB, и потому къ плоскости Z паралельная. слѣдственно плоскость наложенная на концы трехъ перпендикуляровъ равной длины какъ EF, AB, DG стоящихъ на плоскости Z, къ оной будетъ паралельная.

350. когда двухъ не паралельныхъ плоскостей потребно измѣрить наклоненїе, то надлежитъ сперва сыскать линѣю общаго ихъ сеченїя; потомъ отъ

к нѣкоторой

нѣкоторой ея точки провесть въ плоскостяхъ къ онойже линѣе два перпендикуляра, которыя здѣлаютъ уголъ равной наклоненїю тѣхъ двухъ плоскостей (338).

****

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ.

О СТЕРЕОМЕТРІИ.

351. Всякая протяженная величина или всякое пространство имѣющее три измѣренія протяженія, а имянно: длину, ширину и толщину или высоту корпусъ, тѣло или толстота называется.

Въ геометрїи обыкновенно рассуждается о тѣлахъ двоякимъ образомъ.

1е. Какъ о произведенныхъ движенїемъ плоскостей, равно какъ плоскость произходитъ отъ движенїя прямой линѣи, а линѣя производится движенїемъ точки.

По сему понятїю, тѣло не что иное какъ сложенное изъ слѣдовъ плоскости, или лучше, груда плоскостей безконечно малой толщины, которыхъ неисчетное число, равно числу точекъ линѣи размѣряющей путь плоскости тѣло производящей. Каждая такая плоскость называется елементъ, или безмѣрно тонкой слой тѣла.

352.

352. Сїи тѣла производятся двояко либо прямолинѣйнымъ движенїемъ плоскости самой себе паралельно, или круговымъ обращенїемъ фигуры около не подвижной прямой линѣи, которая того тѣла ось имянуется.

353. Пе. Еще признаваются тѣла за составленныя изъ другихъ подобныхъ или не подобныхъ тѣлъ, одно на другомъ лежащихъ, и коихъ два изъ трехъ измѣренїи обыкновенно за безконочно малыя полагаются: такого роду безмѣрно тонкїя тѣла также елементами тѣла ими составленнаго имянуются.

354. Тѣла укоторыхъ стороны суть плоскости во обще называются полїедры (многогранныя). А особливо, тѣло имѣющее 4, 5, 6 ипроч. стороны имянуется тетраедръ, пентаедръ, ексаедръ, и проч. тоесть отъ числа ихъ сторонъ или граней имя получаютъ. Правильныя полиедры называются тѣ укоторыхъ все углы равныя, и стороны ихъ суть равныя, правильныя и одновидныя полигоны.

355. Ежели помыслимъ что прошла плоскость чрезъ нѣкое тѣло раздѣляя его на двѣ части, тогда фигура изображенная на поверьхности тѣла отъ

встречи его сторонъ съ секущею плоскостью, называется сексіонъ, сеченіе или разрѣзъ онаго тѣла: и сіе сеченіе какъ явно есть полигонъ, имѣющей столько сторонъ сколько та плоскость граней тѣла пересечь можетъ.

* *

О происхожденіи и свойствахъ тѣлъ, прямолинейнымъ движеніемъ произведенныхъ.

356. Положеніе I е. Пусть полигонъ ABCDE (ф. 129 и 130) лежа сперва на плоскости течетъ самъ себе вдоль линѣи MN паралельно, и остановится въ FGHIK: тогда онъ своими слѣдами произведетъ пространство или протяженіе отрехъ измѣреніяхъ. Ибо полигонъ имѣя въ себѣ два, движеніемъ своимъ дѣлаетъ третіе измѣреніе, и сіе тѣло правильная призма называется Изъ сего движенія явствуетъ I е. Стороны AB, BC, CD, и проч. опишутъ паралеллограммы ABGF, BCHG CDIH и проч. 2 е. Каждой слѣдъ или елементъ призмы и каждое основаніе между собою суть паралельныя и равныя. По сему обще,

Призма есть тѣло ограниченное базами кои суть полигоны равныя и паралельныя, и граньми состоящими изъ паралеллограммовъ.

357. Призма бываетъ прямая либо наклонная; когда линѣя NM покоторой движится полигонъ производителъ (называемой елементъ тѣла) бываетъ перпендикулярна или наклонна къ плоскости основанія призмы.

358. Прямая PQ (ф. 129) или Pq (ф. 130) проходящая срединою всѣхъ елементовъ тѣла, называется осъ призмы, и оная равна и паралельна всѣмъ сторонамъ AF, BG, CH и проч. призмы, понеже представляетъ слѣдъ центра полигона производителя. Перпендикуляръ PQ (ф. 129) отъ какой нибудь точки одного основанія на плоскость другова, понадобности продолженную проведенной, называется высота призмы.

359. Слѣдст. Iе. Высота прямой призмы равна ея оси; а высота наклонной призмы тѣмъ меньше или короче оси чемъ сіе тѣло больше наклонно на плоскость своего основанія.

360. IIе. Высота тѣла изъявляетъ число паралельныхъ елементовъ оное тѣло составляющихъ: Ибо высота есть расстояніе плоскостей двухъ крайностей тѣла; но между оныхъ столько находится слоевъ сколько есть точекъ въ линѣе размѣряющей ихъ разстояніе:

 Посему

по сему высота тѣла изъявляетъ число его елементовъ, почитая ихъ за паралельныя и безмѣрно тонкія плоскости.

361. Призма въ разсужденіи фигуры своего основанія имѣетъ разныя имена. Ежели елементъ призмы треугольникъ, четыреугольникъ, пятиугольникъ ипроч. По сему призма называется триугольная, четыреугольная ипроч. А буде ея основаніе есть кругъ, такая призма цилиндръ имянуется (ф. 131).

362. Ежели елементъ призмы парялеллограммъ; то оная называется паралеллопипедъ. Имѣющая за елементъ прямоугольникъ имянуется прямоугольной паралеллопипедъ (ф..132). Прямая призма коей основаніе есть квадратъ а высота равна боку основанія, называется кубусъ или (правильной ексаедръ) шестигранникъ (ф. 1 и 133).

Изображеніе правильныхъ призмъ можно представить инако, обращая линѣю NM (ф. 129) саму себѣ паралельно около сторонъ двухъ какихъ ни есть равныхъ и между собою паралельныхъ полигоновъ; а неправильныхъ призмъ около двухъ разныхъ либо равныхъ но непаралельныхъ фигуръ.

363. Положеніе II е. Пусть какой нибудь полигонъ ABCDE (ф. 134) лежащей на плоскости пойдетъ по линѣе MN (перпендикулярной или наклонной къ оной плоскости) такъ что при всякой безмѣрно малой ступени каждая сторона фигуры будетъ умалятся въ арифметической прогрессіи, и наконецъ полигонъ пришедъ въ M здѣлается столь малъ какъ точка:

такимъ

шакимЪ образомЪ произведенное шѣло называется пирамида.

Иначе. Обводя линѣю какЪ MS (ф. 134) на неподвижной шочки M около сшоронЪ какого нибудь полигона ABCDE.

По первому изображенію явно (271) чшо стороны AB, BC, CD и проч. опишутЪ треугольники ABM, BCM, CDM и проч. шакже и по второму.

364. ИшакЪ вообще, пирамида есшь шѣло имѣющее за основаніе полигонЪ, и треугольными сторонами или плоскостьми определенное.

365. Линѣя MN есшь ось пирамиды, а высота ея есшь перпендикулярЪ MN или Mn кЪ основанію, и оная бываетЪ равна или короче оси; когда пирамидЪ есшь прямой или наклонной.

366. Пирамиды шакже по числу сторонЪ ихЪ основанія имѣютЪ разныя имена: ежели оно треугольникЪ, четыреугольникЪ, пятіугольникЪ и проч. то пирамида называется треугольная, четыреугольная, и проч. а у которой основаніе кругЪ та пирамида конусЪ имянуются. Пирамида, у которой всѣ стороны стоятЪ изЪ равнобочныхЪ и между собою равныхЪ треугольниковЪ, называется правильная пирамида или правильной шетраедрЪ или четырегранникЪ.

367. Ежели вЪ произвѣденіи пирамиды случится, что полигонЪ не дойдя до точки M остановится, то пирамида или конусЪ такимЪ образомЪ означенной, называется отрезанная пирамида или конусЪ

 (ф.

(ф. 135 и 136). Потому что можно ихъ представлять какъ пирамиды или конусы коихъ отсечена часть плоскостью къ основанію паралельною.

* *

О произхожденіи и о свойствахъ тѣлъ круговымъ движеніемъ произведенныхъ.

368. Iе. Изображеніе прямаго цилиндра можно представить двояко: обращая прямоугольникъ MABN (ф. 131) около одной его неподвижной стороны MN, коя будетъ ось цилиндра: или обращая линѣю AB около окружности двухъ равныхъ и паралельныхъ круговъ коихъ цѣнтры въ перпенд. MN.

369. IIе. Также и конусъ изобразится, 1 е. Обращая прямоугольной треугольникъ IPL (ф. 136) около одного его бока PL, которой будетъ ось. Ипотенуза IL опишетъ его поверхность, а другой бокъ IP будетъ радіусъ основанія. 2 е. Отъ обращенія линѣи LK въ неподвижной точкѣ L около круга Z.

370. Отрѣзанной конусъ можно произвесть движеніемъ трапезіи PKmq (ф. 136) обращенной около неподвижной линѣи Pq, на которой двѣ неравныя паралельныя стороны PK, qm суть прямостоящія.

371. IIIе. Ежели обратить кругъ на его неподвижномъ діаметре, то симъ движеніемъ произведенная толстота, называется глобусъ или сфера, то есть, шаръ.

По сему сфера есть тѣло такою выпуклою поверхностью определенное, которой всѣ точки отъ внутренной равно отстоятъ, и оная точка центръ сферы называется.

372. Ежели вообразить что чрезъ всѣ точки сряду P, P и пр. (ф. 137) составляющія діаметръ Ss полкруга производителя провѣдутся перпендикуляры MP, MP и пр. до окружности; то изъ сего явствуетъ что отъ обращенія сего полкруга SMs на діаметръ Ss, всѣ оныя перпендикуляры произвѣдутъ столько круговъ сколько есть точекъ въ діаметрѣ Ss, и всѣ оныя круга можно почесть за безмѣрно тонкія цилиндры, одной толщины елементы сферы составляющія, и коихъ полдіаметры прибываютъ и убываютъ въ одномъ содержаніи съ паралельными хордами Mm, Mm какія въ кругѣ сряду провесть можно.

Но естьли полкруга производителя почесть за половину правильнаго полигона (ф. 138) имѣющаго неизчетность сторонъ, и положить что изъ всѣхъ его угловъ опущены прямыя DT, EX, GC и пр. прямостоящія къ вращаемой оси aL, то оныя прямыя взятыя рядомъ по двѣ сочинятъ трапезіи aFDT, TDEX, и пр. и слѣдственно въ обращеніи полкруга aGL около діаметра aL, сіи трапезіи составляютъ столько же отрезанныхъ конусовъ OFDB, BDEA, AEGP, и пр. По сему положенію можно почесть сферу за составленную изъ безконечности отрезанныхъ конусовъ кои хотя неравной но безмѣрно малой толщины.

На конецъ ежели положить что въ полкругѣ

 производи-

производителѣ написано столько одноцентральныхъ полукруговъ сколько есть точекъ въ радїусѣ онаго круга, то въ разсужденїи обращенїя, всѣ оныя полукруги произведутъ столько же сферическихъ соцентральныхъ поверхостей: и по сему положенїю, сферу можно почесть за составленную изъ неизчетности поверхностей или сферическихъ слоевъ безмѣрно тонкихъ но равныхъ, и одно въ другомъ включенныхъ.

373. Всякая прямая линѣя чрезъ цѣнтръ сферы во обѣ стороны до ея поверхности проведенная имянуется ось сферы. Следоват. всѣ оси сферы между собою равныя, по тому что каждая равна двумъ радїусамъ, и всякую ось можно взять за ось производящаго шаръ полкруга.

374. Оттуду слѣдуетъ I е. Ежели сфера какъ нибудь плоскостью разсечется, то сїе сеченїе будетъ кругъ; ибо буде изъ цѣнтра сферы на плоскость того сеченїя проведется перпендикулярная ось; то оная (373) будетъ осью движимаго круга; и потому та плоскость пресечетъ оную ось въ цѣнтрѣ одного елементальнаго круга сферы (372).

375. II е. Сеченїи сферы какою нибудь плоскостью, суть круги тѣмъ большїя чемъ секущая плоскость ближе проходитъ цѣнтра сферы, и обратно; а самое большее сеченїе чрезъ оной цѣнтръ проходитъ. Ибо оныя сеченїи имѣютъ за дїаметры хорды, кои (75) чемъ ближе къ цѣнтру, тѣмъ болѣ увеличиваются, а изъ всѣхъ пребольшая хорда есть самой дїаметръ.

376. III е. Того ради большой кругъ сферы называется тотъ, которой со сферою имѣетъ одинъ цѣнтръ, а малой кругъ сферы тотъ, котораго плоскость чрезъ цѣнтръ сферы не проходитъ.

377. IV е. Напослѣдокъ можно признавать сферу за составленную изъ безчисленности равныхъ и безмѣрно мелкихъ пирамидъ, изъ коихъ у каждой всякая

точка

точка поверхности сферы есть основанїе, а верхи всѣ сходятся въ цѣнтрѣ сферы, и ея радїусъ за общую высоту имѣютъ: но въ разсужденїи правильности сферической фигуры, можно тѣ точки или мнимыя основанїи полагать за правилѣныя полигоны безмѣрно малыя и между собою равныя; и по сему оныя или равносторонныя треугольники либо квадраты или шестїугольники, ибо только таковыя правильныя полигоны могутъ имѣть своихъ сторонъ по двѣ общими не оставляя въ сомкнутїи ни какой полости.

* *

О полїедрахъ или многогранныхъ тѣлахъ и о сравненїи оныхъ.

378. Толстыи уголъ называется тотъ, которой дѣлаешся отъ сомкнутїя многихъ плоскихъ угловъ, кои будучи между собою наклонны въ одну точку сходятся, или тѣла выходящая острина; какъ верхи или острины пирамидъ, углы призмъ, и проч. углы толстыя равныя тѣ, кои состоятъ изъ одинакаго числа плоскихъ угловъ, коихъ сходственныя суть равныя и подобно лежащїя.

379. I. Толстый уголъ не меньше какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ составляется; по тому что два плоскїя угла взаимно наклонныя не дѣлаютъ ни какой толстой острины, но неминуемо между себя полость оставляютъ.

380. II. Изъ многихъ плоскихъ угловъ, толстый уголъ составляющихъ, самой болшой бываетъ меньше суммы остальныхъ; ибо ежели онъ ихъ суммѣ равенъ, тогда на оныя только ляжетъ и всѣ одну плоскость здѣлаютъ,

381. III. Сумма плоскихъ угловъ толстаго угла, есть меньше 360 град: ибо ежели нѣсколько тѣхъ угловъ, которыхъ сумма = 360 град: въ одну точку

ку сомкнутся, то составятъ плоскость, и ни какой острины безъ убавки учинить немогутъ.

382. IV. Поліедръ меньше четырехъ сторонъ не имѣетъ; ибо для составленія каждаго угла поліедра требуется не меньше какъ три угла; но уголъ такъ составленной оставляетъ внутри полость: и такъ для закрытія пустоты требуется по крайней мѣрѣ еще одна плоскость, дабы поліедръ три свои измѣреніи имѣть могъ. Слѣдственно поліедръ имѣетъ больше трехъ угловъ.

383. V. Всѣхъ правильныхъ тѣлъ только пять находится.

Ибо (379) толстой уголъ составляется не меньше какъ изъ трехъ плоскихъ угловъ; и оной (381) меньше бываетъ 360 гр. того ради. 1 е. уголъ правильнаго треугольника = 60 гр. а три вмѣстѣ дѣлаютъ толстой уголъ въ 180 гр: по сему четыре такихъ треугольниковъ сочиняютъ тетраедръ, котораго въ преспективномъ видѣ (ф. A). 2 е. четыре правильныя треугольника составляютъ толстыи уголъ въ 240 гр. и сочиняютъ правильное тѣло о восьми граняхъ, октаедръ (ф. B) 3 е. пять правильныхъ треугольниковъ дѣлаютъ уголъ въ 300 гр. и потому составляется тѣло изъ 20 ти такихъ же граней, называемое икосаедръ (ф. C); но шесть оныхъ вмѣстѣ = 360 гр. что толстова угла не здѣлаетъ. 4 е. Три квадрата дѣлаютъ толстой уголъ въ 270 гр. и такъ составляется правильное тѣло о шести такихъ граняхъ ексаедръ (ф. D); но 4 угла квадрата = 360 гр. что къ сему не годно. 5 е. каждой уголъ правильнаго пятіугольн. есть 180 гр. а три оныхъ вмѣстѣ дѣлаютъ толстыи уголъ въ 324 гр: то изъ сего сочиняется правильное тѣло о 12 ти сторонахъ, называемое додекаедръ (ф. E), но четыре такія угла дѣлаютъ 432 гр. невозможный

толстый

толстый уголЪ. Три угла шестїугольниковЪ = 360 гр. также и прочїя полигоны толстаго угла составить ни какЪ не могутЪ. слѣдовательно правильныхЪ тѣлЪ только 5 находится.

Весьма пристойно читаючи сїе, имѣть предсобою тѣ составлѣнныя правильныя полигоны вырезанныя изЪ картузной бумаги, коихЪ грани здѣсь изображенныя ихЪ числами означены.

* *

О составленїи тѣлЪ изЪ бумаги.

384. Составленїе изЪ бумаги предписанныхЪ правильныхЪ тѣлЪ, также всякихЪ призмЪ и пирамидЪ по начертанїю и состоянїю ихЪ плоскостей, уповаю и безЪ особливаго показанїя всякому читателю уже понятно: но выреска цилиндровЪ, а особливо конусовЪ требуетЪ по ихЪ отмѣнному свойству не большаго вычисленїя а имянно:

1е: Для сочиненїя изЪ бумаги цилиндра, надлежитЪ по данному дїаметру его основанїя x (ф. 139) сыскать окружность и положить ея сЪ мастаба на линѣю AB, а на оной по высотѣ цилиндра начертить прямоугольникЪ ABCD и проч.

2е: А дляырески конуса, должно по данному дїаметру AB (ф. 140) основанїя начертить сЪ мастаба кругЪ Z, и продолжа дїаметрЪ AB положить AE равну боку конуса. По томЪ сыскавЪ по сей пропорцїи, AE кЪ AB = 180 град. кЪ ∠ CED. учиня половине онаго угла равныя углы AEC, AED назначь дугу CD, которая по сему сочиненїю равна будетЪ окруженїю Z. и тако кругЪ Z сЪ секторомЪ CDE вырезанныя составятЪ желаемой конусЪ.

Доказ. насїю пропорцїю. понеже (192) окружность CDF кЪ 360 град. какЪ дуга CD или ей равная окружность Z, кЪ углу CED: но окружности своимЪ дїаметрамЪ пропорцїональны (260), тогo

потого ради поставя въ пропорцїю дїаметры на мѣсто окружностей, будетъ 2 AE : 360 град. = AB : углу CED, или тоже самое 2 AE : AB = 360 гр : углу CED, а раздѣля предъидущїя члены на 2, выдетъ AE : AB = 180 гр. къ углу CED. ч. н. д.

* *

О изображенїи тѣлъ на плоскости.

385. Понѣже всякаго геометрическаго и прочихъ тѣлъ въ подлинномъ ихъ видѣ наклонности ни какъ изобразить не можно, кромѣ что представляя ихъ видимыя со стороны; ибо смотря сверьху, призмы, пирамиды и конусы изображаются простыми плоскостьми. И тако для представленїя на примѣръ кубуса котораго хотя всѣ стороны между собою равныя, но съ боку смотря нѣкоторыя края какъ BC, FG, EH, FG (ф. 133) посилѣ приспективнаго искуства кажутся предъпрочими короче; то для изображенїя онаго должно на чертить рамбоидъ ABCD положа AB, DC, равны краямъ кубуса, а AD, BC несколько по короче; потомъ на углахъ основанїя восставить перпендикуляры равныя высоте кубуса и провесть линѣи EF, FG. ипроч. и тако кубусъ начертится. Подобнымъ сему средствомъ изображаются на плоскости всякїя призмы, пирамиды. ипрочїя тѣла какъ изъ ихъ фигуръ видѣть можно, въ которыхъ для лучшаго представленїя глазамъ нѣкоторыя стороны тѣнью покрываются.

* *

О сравненїи тѣлъ.

386. Два тѣла совершенно или вовсемъ между собою равныя, буде у нихъ сходственныя грани суть подобныя, равныя и въ обѣихъ по равному числу.

387. Подобныя тѣла называются тѣ, коихъ всѣ сходственныя углы равныя, и состоятъ изъ одного числа подобныхъ полигоновъ, кои (251) раздѣляются

дѣляются на подобныя треугольники, и оныхъ всѣ сходственныя измѣренія пропорціональны.

388. Слѣдст. Два какія нибудь поліедра одного званія, также и две сферы, суть тѣла подобныя.

Для яснаго понятія одвухъ подобныхъ тѣлахъ надлежитъ представить въ умѣ, будто оныя оба составлены изъ равнаго числа подобныхъ и единообразно сложенныхъ плоскостей, такъ что ихъ неравность состоитъ только въ томъ что каждая елементальная плоскость большаго тѣла имѣетъ поверьхность и толщину больше поверьхности и толщины сходственной плоскости меньшаго тѣла, и оныя плоскости находятся всегда въ одномъ содержаніи. напримѣръ двѣ сферы суть два тѣла подобныя, 1е. по тому что оныя состоятъ изъ круглыхъ плоскостей, то есть подобныхъ фигуръ; кои суть симетрическія правильныя полигоны (177) одинакаго неисчетнаго числа сторонъ. 2е. оныя плоскости подобно лежатъ въ каждой сферѣ, ибо они всѣ помещены перпендикулярно къ оси проходящей чрезъ ихъ центры, и расположены такъ что ихъ діаметры слѣдуютъ содержанію сряду всемъ хордамъ круга. 3е. ихъ равное число въ каждой сферѣ; по тому что всѣ мнимыя круга имѣютъ одинакое число сторонъ безмѣрно малыхъ, такъ же и равное число хордъ: ибо хорды суть линѣи соединяющія всѣ углы или всѣ стороны одинакимъ образомъ, и отъ оси на обѣ стороны въ равномъ разстояніи лежащія.

Разность между большею и малою сферою состоитъ въ томъ: 1е. что каждой діаметръ всехъ елементальныхъ плоскостей большей сферы есть больше (но въ непременномъ содержаніи) діаметра каждаго сходственнаго слоя малой сферы, 2е. что

стороны

стороны елементальныхъ плоскостей большей сферы (хотя безмѣрно малыя какъ напримѣръ хорды дугъ содержащихъ кварты градуса) больше подобныхъ сторонъ малой сферы, и по тому хорды ихъ соединяющія по обѣ стороны оси суть поменѣ сжаты, слѣдственно и толщина плоскостей, то есть, разстояніе тѣхъ хордъ въ большой сферѣ есть болѣ разстоянія мнимыхъ плоскостей въ малой сферѣ.

389. Подобно положенныя точки въ двухъ подобныхъ фигурахъ, называются сходственныя точки двухъ подобныхъ фигуръ.

390. Ежели чрезъ двѣ сходственныя точки взятыя на сходственныхъ граняхъ въ верху двухъ подобныхъ тѣлъ проведется внутри ихъ по одной прямой линѣе, тогда оныя линѣи имянуются сходственныя оси.

391. I. Ежели сквозь какое нибудь тѣло A провесть сколь угодно между собою равноотстоящихъ паралельныхъ плоскостей (понадобности продолженныхъ, кои съ осью тѣла A дѣлаютъ вездѣ равныя углы и дѣлятъ его на части равной толщины); потомъ означить сквозь подобное тѣло B, тоже число паралельныхъ и равноразстоящихъ плоскостей, кои со сходственною осью сего тѣла дѣлаютъ тожже уголъ какой учинили плоскости съ осью тѣла A; тогда два тѣла A, B раздѣлятся на равное число сходственныхъ слоевъ.

392. II. Ежели пересечь тѣло A какъ нибудь пополамъ, также и подобное ему тѣло B чтобъ сеченіе прошло чрезъ всѣ точки сходственныя точкамъ сеченія тѣла A, то отсеченныя двѣ части будутъ два тѣла подобныя, такія же суть и остальныя двѣ части.

Доказ. Ибо ежели на примѣръ сеченіе тѣла A пройдетъ чрезъ 100 й елементальной слой, и сеченіе тѣла B пройдетъ чрезъ 100 й же свой слой; но какъ

сїи слои полагаются сходственный, то они будутЪ подобно лежащїя; по сему каждая вЪ нихЪ отсеченная часть состоитЪ изЪ 99 подобныхЪ и подобно лежащихЪ слоевЪ, слѣдственно каждая такая часть есть тѣло подобное.

393. III. Также явно есть, что поверхности сихЪ сеченїи суть площади подобныя. Ибо отЪ положенїя сеченїи проходятЪ чрезЪ все сходственныя точки, потому они суть равнообразно расположенныя и вЪ разстоянїяхЪ пропорцїональными линѣями измѣряемыхЪ и составляютЪ фигуры подобныя.

394. IV. Ежели чрезЪ три сходственныя точки взятыя (не вЪ прямой линѣе) на поверхности двухЪ подобныхЪ тѣлЪ, провесть плоскость сквозь каждое тѣло, то каждое тѣло раздѣлится вЪ двѣ части, коихЪ сходственныя будутЪ тѣла подобныя.

395. V. Какїя ниесть прямыя чрезЪ двѣ сходственныя точки взятыя вЪ двухЪ подобныхЪ тѣлахЪ проведенныя, между собою суть вЪ одномЪ содержанїи сЪ двумя какими либо сходственными сторонами оныхЪ тѣлЪ.

396. VI. Ежели изЪ какихЪ нибудь сходственныхЪ угловЪ опустить на ближнїя или противолежащїя продолженныя либо нѣтЪ плоскости, перпендикуляры, размѣряющїя высоту тѣхЪ угловЪ отЪ сихЪ плоскостей, то оныя высоты сторонамЪ, или какимЪ ниесть сходственнымЪ линѣямЪ будутЪ пропорцїональныя.

397. Называю вообще сходственными измѣренїями двухЪ подобныхЪ тѣлЪ, сходственныя стороны, либо двѣ линѣи гдѣ нибудь токмо пропорцїонально или перпендикулярно вЪ тѣлахЪ проведенныя. Генералное свойство подобныхЪ тѣлЪ состоитЪ вЪ томЪ, что всѣ ихЪ сходственныя измѣренїя имѣются пропорцїоналны.

398. Слѣдст. У подобныхЪ пирамидЪ, кону-

совъ, призмъ, цилиндръ сходственныя стороны, высоты, обводы основаній, діаметры и радіусы между собою пропорціональныя.

* *

О измѣреніи высотъ всякихъ тѣлъ.

399. Всѣхъ подручныхъ правильныхъ тѣлъ и прямыхъ конусовъ, пирамидъ, призмъ и прочихъ высоты, можно узнавать иныя геометрическимъ вычисленіемъ, а другія по мастабу; наклонныхъ же и неправильныхъ также вычисленіемъ и механически приставляя къ тѣлу наугольникъ описанной (348). А для нѣкоторыхъ надлежитъ прикладывать къ длинной его сторонѣ и навершину тѣла простой наугольникъ показанной (65). Способы измѣренія высотъ неподручныхъ тѣлъ, какъ то высокихъ пирамидъ, башенъ, горъ и проч, показаны здѣсь въ практической геометріи.

* *

О измѣреніи поверхности всякаго тѣла.

400. Поверхность тѣла называется здѣсь только площадь его сторонъ, выключая основаніи, буде имѣются; а съ оными вмѣстѣ цѣлая поверхность тѣла имянуется.

401. I. Цѣлая поверхность всякаго поліедра или многограннаго тѣла равна суммѣ площадей фигуръ его стороны, или грани и основаніе составляющихъ.

402. II. Поверхность всякой прямой призмы равна произведенію ея высоты, умноженной обводомъ ея основанія; ибо оная равна суммѣ площадей параллелограмныхъ граней призмы, изъ коихъ каждая равна произведе-

произведенїю каждой стороны обвода высотою. А наклонныхъ призмъ поверхность равна произведенїю обвода основанїя призмы перпендикуляромъ, на которой нибудь сторонѣ призмы къ боку обвода опущеннымъ (270 и 274).

403. Слѣдст. Поверхность цилиндра равна произведенїю его оси окружностью круга его основанїя; ибо кругъ есть мысленной полигонъ имѣющей неисчетность сторонъ безмѣрно малыхъ (177).

404. III. Поверхность прямой пирамиды, за основанїе правильной полигонъ имѣющей, равна произведенїю полуобвода ея основанїя, умноженнаго перпендикуляромъ отъ верха на одинъ бокъ основанїя проведеннымъ. Сей перпендикуляръ называется апо-埋темъ пирамиды.

Доказ. Ибо площадь всякаго треугольника или стороны пирамиды (401) равна произведенїю высоты полуоснованїемъ, то есть половиною бока обвода, но какъ всѣ оныя треугольники равныя, по сему поверхность пирамиды равна произведенїю высоты треугольниковъ (апотемомъ) умноженной полуобводомъ основанїя пирамиды.

405. Примѣч. Ежели пирамида наклонная, или буде у нея основанїе есть неправильной полигонъ, тогда сыскивается площадь въ каждой ея треугольной грани, которыхъ сумма равна будетъ поверхности наклонной пирамиды.

406. Слѣдств. Поверхность прямаго конуса равна половинѣ произведенїя окружности его основанїя умноженной длиною его бока или апотемы. По сему поверхн. равноб. конуса въ двое болѣ площади своего основанїя (289).

407. IV. Поверхость прямой на правильномъ основанїи пирамиды, отрезанной плоскостью къ основанїю паралельною, равна произведенїю остатка апотемы среднимъ обводомъ, то есть полусуммою сторонъ сеченїя и основанїя.

Доказ. Ибо поверхность такой пирамиды состоитъ изъ равныхъ трапезїй, но каждой трапезїи площадь равна (283) произведенїю остатка апотемы полусуммою паралельныхъ ея боковъ, то есть среднимъ бокомъ умноженной; того ради (274) поверхность всея отрезанной пирамиды равна произведенїю остатка апотемы умноженнаго полсуммою всѣхъ паралельныхъ боковъ, то есть среднимъ обводомъ оной пирамиды.

408. Слѣдст. Поверхность прямаго отрезаннаго конуса равна произведенїю одной ея стороны или апотемы умноженной окружностью средняго круга между паралельныхъ онаго круговъ.

409. V. Поверхность шара равна произведенїю окружности большаго круга своею осью, или равна площади круга, коего радїусъ есть дїаметръ шара.

Доказ. Когда докажется, что поверхность каждаго изъ отрезанныхъ конусовъ составляющихъ (372) елементы сферы равна есть произведенїю оси или толщины сего отрезаннаго конуса умноженной окружностью большаго круга сферы, то явно будетъ, (274) что сумма площадей всѣхъ оныхъ отрезанныхъ конусовъ слѣдственно и поверхность сферы равна есть произведенїю суммы всѣхъ осей конусовъ (то есть цѣлыя оси сферы) умноженной окружностью большаго круга онаго шара.

Для того чрезъ d (ф. 138) средину бока или апотемы AB отрезаннаго конуса ABDE, произвольно взятаго, проведи dR паралельно плоскостямъ BD, AE; а dS къ AB перпендикуляръ, которой пройдетъ (81) чрезъ цѣнтръ шара и будетъ его осью. Изъ B на AE опустя перпендикуляръ BZ, то полу-

получитъ BZ = TX оси отрезаннаго конуса. Проведя RS будутъ прямоугольныя треугольники ABZ, dRS подобныя, имѣющїя кромѣ прямыхъ угловъ, уголъ BAZ = RSd; ибо для паралельныхъ dR, AE, уголъ BAZ = BdR, а угла BdR, также и угла RSd (86) есть мѣра полдуги daR; по сему ∠RSd = BAZ, также и ∠ABZ = ∠RdS. Того ради (207) AB : BZ или : TX :: dS : dR. Но (260) окружности круговъ въ одномъ содержанїи съ ихъ дїаметрами, то по сему AB : TX какъ окружность круга, коего дїаметръ dS, (то есть дїаметръ большаго круга шара) къ окружности круга, коего дїаметръ есть dR; и тако (194) произведенїе AB окружности коей дїаметръ dR равно произведенїю TX окружностью большаго круга шара. Но (408) поверхность отрезаннаго конуса EAED, равна произведенїю апотемы AB окружностью, коей дїаметръ есть dR; и потому поверхность онаго конуса равна произведенїю его оси TX, умноженной окружностью большаго круга шара. Равнымъ образомъ можно доказать, что поверхность отрезаннаго конуса BDFO равна произведенїю его оси aT умноженной то-

южъ окружностью, и проч. Слѣдственно (274) сумма поверхностей всѣхъ оныхъ конусовъ, то есть цѣлаго шара поверхность равна произведенїю суммы всѣхъ ихъ осей, (кои составляютъ цѣлую ось шара aL) окружностью большаго круга шара умноженной.

410. Слѣдст. I. Поверхность шара есть въ четверо болѣ своего большаго круга, ибо площадь большаго круга шара равна произведенїю его полдїаметра $\frac{1}{2}$ d, половиною его окружности $\frac{1}{2}$ p (289), что $= \frac{1}{4}$ pd; а поверхность шара равна произведенїю pd своего дїаметра или оси d, окружностью p большаго круга умноженной; по сему pd есть въ четверо болѣ $\frac{1}{4}$ pd.

411. II. Поверхность шара равна поверхности цилиндра коего ось равна оси шара, а основанїе равно большому кругу шара; а приложа къ тому основанїи цилиндра, будетъ цѣлая его поверхность къ сферической какъ 3 къ 2. Ибо тогда поверхность цилиндра въ шестеро больше своего основанїя, а сферическая онагожъ болѣ въ четверо (403 и 410).

412. III. Выпуклая поверхность зона (пояса) или какой нибудь части шара сеченїемъ одной или двухъ паралельныхъ плоскостей опредѣленная, равна поверхности цилиндра, коего основанїе есть большой кругъ того шара, а высота равна толщинѣ тоя части: на примѣръ цилиндра поверхность HIEF равна поверхн. части шара RDS (ф. 141).

413. VI. Прямаго конуса ILK (ф. 136) поверхность къ основанїю, какъ бокъ IL къ радїусу IP.

Доказ. Ибо поверхность конуса равна произведенїю окружн. основанїя чрезъ $\frac{1}{2}$ IL

(406)

(406); но площадь основанія равна окружности $\times \frac{1}{2}$ IP. Того ради поверхн. конуса къ основан. какъ окружность $\times \frac{1}{2}$ IL къ окружн. $\times \frac{1}{2}$ IP или какъ $\frac{1}{2}$ IL : $\frac{1}{2}$ IP, или IL : IP.

414. Слѣдст. Поверхность равнобочнаго конуса въ двое своего основанія, а цѣлая поверхность онаго въ трое. Ибо тогда бокъ IL въ двое болѣ радіуса круга IP и проч.

415. VII. Поверхность отрезка шара какъ RDS (ф. 141) равна кругу радіуса DR.

Доказ. Ибо (212) ÷ dD · RD · DO. Но кругъ радіуса dD равенъ поверхности шара, для того что радіусъ dD двойной радіуса CD шара (409); по сему поверхность шара къ кругу радіуса RD какъ dD : DO. По томъ умножъ второе содержаніе окружностью круга RDSdR, кою положа = Q, и будетъ поверхность шара къ кругу радіуса DR какъ dD × Q : DO × Q; но (409) dD × Q = поверхн. шара, а DO × Q равно поверхности того отрезка (412), и тако отъ равности членовъ поверхность отрезка RDS, равна кругу радіуса DR.

416. VIII. Поверхность какова нибудь отрезка pRDSq къ поверьхн. прямаго конуса pDq какъ бокъ pD : pb (ф. 141).

Доказ. Ибо кругъ радіуса pD къ кругу X, какъ pD□ : pb□, то есть (413) во удвоенномъ

военномЪ содержанiи конической поверхности кЪ кругу радiуса pЪ, и потому кругЪ радiуса pD кЪ конич. поверхн. какЪ оная жЪ поверхн. кЪ кругу радiуса pЪ, или какЪ pD : pЪ Но (415) кругЪ радiуса pD равенЪ поверхн. отрезка pDq, по сему оная поверхн. кЪ конической какЪ pD : pЪ.

СлѢдственно поверхность отрезка шара вЪ двое поверхн. равнобочнаго конуса вЪ немЪ написаннаго; ибо тогда pD вЪ двое болѢ есть pЪ.

417. IX. Поверхность шара вЪ двое поверхн. квадратнаго цилиндра ABEF вЪ немЪ написаннаго (ф. 141).

Доказ. Ибо AE□ = AB□ + BE□ = 2 AB□; по сему кругЪ дiаметра AE вЪ двое болѢ круга дiаметра AB. Но поверхн. шара вЪ четверо болѢ круга дiаметра AE, или вЪ осмеро круга дiаметра AB, а оной вЪ четверо менѢ поверхности цилиндра; ибо площадь круга = $Z \times \frac{1}{4}$ AF, а цилиндра поверхн. $Z \times AF$. СлѢдст. поверхн. шара вЪ двое болѢ поверхн. цилиндра вЪ немЪ написаннаго.

418. X. Поверхность шара кЪ цѢлой поверхности вписаннаго квадратнаго цилиндра какЪ 4 : 3.

Доказ. Ибо поверхность сего цилиндра кЪ своему основанiю (289 и 403) какЪ 4 : 1, а цѢлая онаго поверхн. кЪ обоимЪ основан. какЪ 4 + 2 : 1 + 1, то есть 6 : 2. Но поверхн. шара

одного

одного основанія въ осмеро болѣ, а къ обоимъ какъ 8 : 2; того ради поверхн. шара къ цѣлой поверхн. цилиндра какъ 8 : 6, 4 : 3.

419. Слѣдственно цѣлая поверхность около шара написаннаго цилиндра въ двое больше поверхности вписаннаго; ибо (411) поверхн. около шара описан. къ поверхн. шара какъ 3:2 или 6:4, а вписаннаго къ оной какъ 3:4. По сему первая поверхн. есть въ двое больше другой.

420. XI. поверхн. шара къ цѣлой поверхн. равнобоч. написаннаго въ немъ конуса pDq, какъ 16:9 а къ поверхн. около его описаннаго конуса какъ 4:9.

Доказ. 1 е. Ибо явно что $db = \frac{1}{4} dD$, и тако $bD = \frac{3}{4} dD$; и по сему (299) поверхность отрезка $pDq = \frac{3}{4}$ поверхн. шара, или оныя въ содержаніи какъ 12 : 16. Но (416) поверхн. отрезка въ двое конуса pDq, или въ содерж. 12 : 6, и такъ поверхность шара къ конической какъ 16 : 6; а понеже поверхность такого конуса въ двое своего основанія (414), по сему онаяжъ къ цѣлой поверхн. будетъ какъ 2 : 3 или 6 : 9; и тако отъ равности членовъ, поверхность шара къ цѣлой конической поверхности pDq какъ 16 : 9.

При томъ же основаніе X къ кругу Z какъ 3 : 4. Ибо (216) $Ad\square : pb\square :: dD : bD :: 4 : 3$.

2 е. Понеже $dh = \frac{1}{4} Kh$, и отъ того Kh въ двое AB, и (299) кругъ NhGK къ кругу Z равно какъ 4 : 1. Но понеже

 кругъ

кругъ NGK къ кругу V какъ 4 : 3, то отъ равности кругъ Z къ кругу V какъ 1 : 3. А понеже цѣлая конуса поверхность NGK (414) въ трое круга V, и потому оная жъ круга Z въ девятеро, но поверхность шара тогожъ круга въ четверо; и тако цѣлая конич. поверхность къ поверхн. шара какъ 9 : 4. Отъ сюду слѣдуетъ.

421. Iе. Около шара описанн. правильн. конуса цѣлая поверхность въ четверо болѣ цѣлой поверхн. вписаннаго подобнаго конуса: для равности членовъ въ содержаніяхъ 16 : 9, 9 : 4.

422. IIе. Поверхность конуса NGK въ полтора болѣ поверхн. цилиндра ABEF. ибо (414) поверхн. конуса въ двое круга V, а поверхн. того цилиндра въ четверо круга Z, а кругъ V къ кругу Z какъ 3 : 1. Того ради коническая поверхн. къ цилиндрич. какъ 3 × 2 : 1 × 4 или 6 : 4 или какъ 3 : 2, то есть въ полуторномъ содержаніи; равно какъ оной цилиндръ къ шару pDq (411).

423. IIIе. Пребольшой кругъ шара pDq, поверхность онаго шара, цѣлая поверхность конуса NGK, и поверхность шара NGK, между собою какъ числа 1. 4. 9. 16. или какъ квадраты радиксовъ 1. 2. 3. 4. Изъ сего явно, что поверхность шара NGK въ четверо больше поверхности шара pDq; ибо 16 есть въ четверо болѣ 4 хъ.

* *

О сравненіи поверхностей тѣлъ.

Выше сего видели что выключая основаніи тѣлъ ихъ поверхность находится всегда равна произведенію двухъ измѣреніи; то изъ сего вообще слѣдуетъ предложить.

424. I. Поверхности какихъ нибудь двухъ тѣлѣ одного виду имѣются въ составномъ содержанiи ихъ одноимянныхъ измѣренiи.

425. Слѣдст. Iе. Ежели изъ двухъ тѣлъ одного виду каждое имѣетъ по одному равному измѣренiю, тогда ихъ поверхности будутъ между собою, какъ другое измѣренiе, то есть, когда у двухъ призмъ, двухъ грямыхъ цилиндровъ одинакiя высоты или буде у двухъ прямыхъ пирамидъ на правильномъ основанiи, двухъ конусовъ и проч. равныя апотемы, тогда ихъ поверхности будутъ въ равномъ содержанiи съ обводами ихъ основанiевъ: и ежели двѣ прямыя призмы, два прямыя цилиндра, двѣ пирамиды прямыя на правильныхъ основанiяхъ, два конуса и проч. имѣютъ обводы основанiи равныя, тогда ихъ поверхности въ одномъ содержанiи съ ихъ апотемами. Ибо оныя (191) будутъ какъ произведенiи двухъ неравныхъ величинъ одинакою.

426. II е. Ежели одноимянныя измѣренiя двухъ одинакихъ тѣлъ находятся въ обратномъ содержанiи, тогда ихъ поверхности будутъ равныя и обратно. По сему поверхнссти цилиндровъ или призмъ суть равныя, когда высота перваго къ обводу его основанiя, какъ обводъ основанiя другаго тѣла къ его высотѣ, и обратно (279 и 280).

427. II. Цѣлыя же поверхности двухъ какихъ нибудь подобныхъ тѣлъ, также двухъ какихъ либо правильныхъ одновидныхъ тѣлъ, между собою какъ квадраты ихъ сходственныхъ измѣренiи, или въ удвоенномъ содержанiи ихъ сходственныхъ измѣренiи.

Доказ. Ибо ежели два какiя подобныя тѣла, имѣютъ всѣ свои сходственныя измѣренiи пропорцiональныя (397), то поверхности ихъ между собою какъ произведенiи пропорцiональныхъ величинъ, то есть (Ариф. стр. 349) въ удвоенномъ содержанiи сихъ измѣренiи.

428. Слѣдст. Поверхности какихъ нибудь шаровъ между собою какъ квадраты ихъ осей или радїусовъ; понеже (388) шары суть тѣла подобныя, а оси и радїусы ихъ сходственныя измѣренїи.

* *

О измѣренїи толстоты всякаго роду тѣлъ.

429. Толстота называется опредѣленное пространство, хотя оное пустое или нѣкимъ тѣломъ занетое, потому (351) что всякое пространство разсуждается по тремъ измѣренїямъ протяженїя. Того ради при измѣренїи естественнаго тѣла весма надлежитъ различать толстоту съ его составомъ и съ его плотностїю. Толстота есть повсемственное пространство между поверхностей сторонъ сего тѣла заключенное; составъ есть сущее количество матерїи изъ коей тѣло составлено, а его плотность есть содержанїе помещенїя къ его составу; по чему разсуждаемъ, что тѣло тѣмъ плотняе, чемъ болѣ въ мѣньшемъ пространствѣ матерїи содержитъ.

430. Величина пространства или толстота тѣла равна суммѣ мнимыхъ слоиковъ ево составляющихъ. Сїи слоики суть тѣла же, токмо безмѣрно малой толщины, и потому оныя можно почесть за простыя поверхности: по сему положенїю толстота тѣла есть сумма поверхностей, такъ какъ поверхность есть сумма линѣи, а линѣя сумма точекъ.

431. Подобнымъ образомъ разсуждая о тѣлахъ, какъ (268 и пр.) о поверхностяхъ, ясно видимъ, 1 е. что кубусы неминуемо за общїя мѣры толстоты взять надлежитъ. И потому на примѣръ толстота въ 100 футъ должна занять такое пространство, которое бы сотью кубусами каждаго фута точно было наполнено. 2 е. Число частей мѣры въ толстотѣ

равно

равно третей степени частей тояже мѣры въ длинѣ. По сему кубическая сажень содержитъ 343 кубич. футовъ, потому что оная состоитъ изъ 7 слоевъ, каждой въ одинъ футъ толщины и сажени квадратной или 49 футъ квадратныхъ. А въ кубическомъ футѣ 1728 кубическихъ дюймовъ и проч. (смотри въ Ариф. стр. 193).

Слѣдтс. Ежели на примѣръ положить прямой призмы ACEG (ф. 132) длина AB = 3 фут. ширина БС = 2 ф. высота CG = 5 ф. то по сему толстота оной призмы будетъ 30 кубичныхъ футовъ. Ибо какъ явствуетъ въ фигурѣ, что въ одномъ въ верхнемъ или нижнемъ слою, которой на футъ толщины, толстота = 6 кубич. фут. слѣдственно въ пяти такихъ слояхъ есть 6 × 5 = 30 кубич. футамъ толстотѣ сего паралеллопипеда.

432. I. Паралеллопипедъ плоскостью проходящею чрезъ супротивныя угла раздѣляется на двѣ равныя треугольныя призмы, что явно (160) въ ф. 132.

433. II. Толстота призмы или цилиндра равна произведенію ихъ высоты основаніемъ.

Доказ. Понеже (351) призма, такъ и цилиндръ, состоятъ изъ толикихъ слоевъ полигона равнаго основанію, сколько есть точекъ въ высотѣ, или можно ихъ почесть за составленныя изъ безконечно тонкихъ, паралельныхъ и равныхъ основа-

нїю

нїю плоскостей: того ради для познанїя толстоты призмы, надлежитъ столько основанїевъ вмѣстѣ сложить, сколько есть точекъ въ высотѣ, то есть площадь основанїя должно помножить высотою призмы или цилиндра.

434. III. Всякой разрѣзъ пирамиды или конуса паралельной основанїю есть фигура подобная ихъ основанїю (206 и 251).

435. IV. всѣ одновидныя тѣла, прямыя или наклонныя, имѣющїя равныя основанїя и высоты между собою равныя.

Доказ. У призмъ и цилиндровъ сїя равность и безъ дальнаго изъясненїя собою явно видна; ибо оныя состоятъ изъ толикихъ равныхъ слоевъ основанїямъ, сколько точекъ имѣется въ ихъ высотахъ: а когда оныя высоты между собою равны, то слѣдуетъ и суммамъ ихъ слоевъ, то есть толстотамъ ихъ быть равнымъ между собою. Но остается сумненїе о такой равности въ конусахъ или пирамидахъ, что каждой ли слой пирамиды паралельной основанїю равенъ есть соотвѣтствующему слою другой пирамиды или конуса.

Для того возмемъ въ доказательство пирамиду съ конусомъ на одной плоскости

состоящихъ

стоящихъ, у которыхъ основанiи X, Z и высота Mn, LP равныя, и представя себѣ что оныя пересечены плоскостью QR, ихъ основанiямъ паралельною посмотримъ будутъ ли ихъ сеченiи x, z, равныя.

Ибо отъ помянутаго пресеченiя оныхъ тѣлъ, слой x будетъ полигонъ (434) подобной основанiю X, также и кругъ z кругу Z. А понеже (298) x : X = bc □ : BC □ или Mc □ : MC □ или = Mp □ : Mn □, для паралельныхъ BC, bc, cp и Cn; по сему x : X = Mp □ : Mn □, по тойже причинѣ и z : Z = Lq □ : LP □. Но въ рассужденiи равныхъ высотъ и частей Mp, Lq содержанiе Mp □ : Mn □ = Lq □ : LP □, а отъ сея равности и x : X = z : Z, или x : z = X : Z; но X = Z, по сему и x = z. Такимъже образомъ можно доказать, равность и всѣхъ прочихъ соотвѣтствующихъ слоевъ оныхъ тѣлъ. Слѣдственно пирамида съ конусомъ имѣющiя равныя основанiя и высоты состоятъ изъ одного числа между собою равныхъ и своимъ основанiямъ подобныхъ слоевъ, потому и въ толстотѣ между собою равныя.

436. Слѣдст. всѣ пирамиды и конусы имѣющiя равныя основанiя и высоты, между собою равныя.

437. V. Каждая треугольная призма раздѣляется

точно

точно на три треугольныя пирамиды, которыя въ толстотѣ между собою равныя.

Доказ. Назначь въ граняхъ тоя призмы (ф. 142) дїагонали BD, AF, BF; но понеже треугольники AED, EDE равныя (160), по сему и пирамиды ABFD, BDEF имѣя одинъ верхъ, F то есть одну высоту, и равныя основанїи ABD, BDE, между собою (436) равныя, и оныя составляютъ пираmиду ABEDF, которую отнявъ изъ призмы, останется третья пирамида ACBF, равна пирамидѣ BDEF, ибо оныя имѣютъ высоты, CF, BE и основанїи ACB, DEF равныя. Но буде призма есть наклонная, тогда пирамиды ACBF, BDEF отъ равности своихъ сторонъ будутъ также равныя.

438. Слѣдствїе. I. Всякая пирамида содержитъ $\frac{1}{3}$ толстоты призмы, съ которою равныя основанїи и высоты имѣютъ. Ибо всякая многоугольная пирамида, подобно какъ полигонъ, раздѣляется на треугольныя призмы; а понеже каждая такая призма (437) въ трое больше своей пирамиды, по сему сумма или цѣлая призма въ трое будетъ больше суммы тѣхъ пирамидъ, или цѣлой многоугольной пирамиды.

439. II. Также и цилиндры въ трое больше конусовъ имѣющихъ съ ними равныя основанїя и высоты. Ибо онѣ за бесчисленно гранныя или многоугольныя призмы и пирамиды признаваются.

440. III. Толстота всякой пирамиды и конуса равна $\frac{1}{3}$ произведенїя площади основанїя высотою.

441.

441. IVе. всякія призмы и цилиндры, то есть прямыя и наклонныя имѣющія равныя основанія и высоты по толстотѣ между собою равныя.

442. Vе. Призмы и цилинрды равно высокія между собою, какъ ихъ основанія, а на равныхъ основаніяхъ, какъ ихъ высоты. Тоже разумѣется о пирамидахъ и конусахъ. А ежели цилиндръ пресѣчется плоскостью паралельною основанію, то его части будутъ въ одномъ содержаніи съ частьми высоты.

443. VI. толстота шара равна двумъ третямъ произведенія оси площадью большаго его круга.

Доказ. Понеже шаръ состоитъ (377) изъ безчисленности равныхъ пирамидъ, безмѣрно тонкихъ, имѣющихъ за высоту радіусъ шара, и оныхъ число равно числу точекъ поверхности шара, кои суть ихъ основаніи; и по сему толстота шара равна суммѣ толстотъ всѣхъ тѣхъ пирамидъ, то есть, равна $\frac{1}{3}$ произведенія радіусомъ поверхности шара, или равна $\frac{2}{3}$ произведенія оси четвертью поверхности шара: но четверть поверхности шара равна (410) площади большаго круга. Слѣдов. толстота шара равна $\frac{2}{3}$ произведенія ея оси площадью своего большаго круга.

444. Слѣдст. Iе. Толстота шара равна $\frac{2}{3}$ толстоты цилиндра около шара описаннаго; ибо толстота сего цилиндра равна произведенію своего основанія, то есть площади большаго круга того

шара высотою или его осью (433). По сему толстота такого цилиндра къ толстотѣ шара какъ 3 : 2, то есть въ полуторномъ содержанiи.

445. IIе. шаръ по толстотѣ равенъ пирамидѣ или конусу коего основанiе равно поверхности, а высота радiусу шара.

446. IIIе. для вычисленiя толстоты шара, надлѣжитъ сыскать площадь его большаго круга, и умножить оную осью, то $\frac{1}{6}$, а буде радiусомъ, то $\frac{1}{3}$ произведенiя будетъ толстота шара.

447. задача I. по данному дiаметру pq (ф. 141) и высотѣ bd отрезка pbqdp шара, онаго корпуленцiю или толстоту сыскать.

рѣш. Ибо имѣя данныя pb = bq, также и bd, найдется (216) bD и Cb высота конуса CX. По томъ площадь круга сферы pDq умножь высотою bd, произведенiе выдетъ равно (411) поверхности отрезка, которую умножа радiусомъ шара FC, то $\frac{1}{3}$ произведенiя будетъ (443) толстота сектора шара Cpdq. Послѣ сыскавъ толстоту конуса CX (умножа площадь основанiя X чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты Cb) вычти ея изъ толстоты сектора, останется искомая толстота отрезка сферы dX.

448. II. Сыскать толстоту какой нибудь паралельной части шара какъ ABCD (ф. 143).

рѣш. По надлежащимъ къ сему заданiямъ

ніямъ найди (447) отрезки шара AGB, DGC, коихъ разность будетъ желаемая толстота зона или пояса шара.

449. III. найти толстоту отрезаннаго цилиндра abcd (ф. 144) коего даны ad, be и діаметръ ab.

РѢш. раздѢля de пополамъ въ c проведи hc паралельно къ ab пока встрѢтится съ продолженною ad въ i, и (433) сыскавъ толстоту цилиндра abhi; коя какъ видно равна есть толстотѢ даннаго цилиндра.

450. IV. по заданной сторонѢ LK и окружности прямаго конуса найти его толстоту (ф. 136).

РѢш. Чрезъ окружность вычисли (318) діаметръ основанія конуса, потомъ въ прямоугольн. △ LPK зная PK, LK найдется (214) высота LP, и толстота конуса: для сыску толстоты въ наклонныхъ конусахъ или пирамидахъ, кои хотя и прямыя, но имѢютъ за основаніе неправильной полигонъ, надлежитъ сперва наугольникомъ смѢрить (399) ихъ высоту, и проч.

451. V. Сыскать толстоту какой либо прямой пирамиды, на примѢръ пятигранной (ф. 134).

РѢш. ВымѢря апотемъ LN основанія и апотемъ LM пирамиды найди (214) высоту MN, а чрезъ то сыщется (440) и толстота оной пирамиды.

452. для познанія толстоты отрезаннаго конуса IrmK (ф. 136) надлежитъ сыскать толстоты конусовъ IKL, rmL, то оныхъ разность будетъ толстота отрезаннаго конуса. равнымъ образомъ

 находим-

находится толстота и отрезанныхъ пирамидъ. Иначе короче, но не столь вѣрно; надлежитъ пол-сумму крайнихъ поверхностей умножить высотою сего отрезаннаго конуса или пирамиды.

453. VI. Прямой призмы даны стороны основанія abc да линѣи ad, be, cf разной величины, толстоту сыскать (ф. 145.)

Рѣш. 1е. Отмѣтя cp и aq = be проведи qe, pe, qb: вычисля площадь △abc умножь ея высотою aq, произведеніе будетъ толстота призмы ape. 2е. Сыскавъ (286) площадь фигуры qpfd, и смѣря высоту пирамиды найди ея толстоту, кою сложа съ первосысканною, сумма ихъ будетъ толстота всея данной призмы.

454. Примѣч. Ежели линѣи ad, be, cf не прямостоящія къ плоскости abc, тогда слѣдуетъ раздѣлить призму на двѣ пирамиды, проведя линѣи ae, ce, и сыскать въ нихъ толстоту и проч.

455. Для вычисленія толстоты въ срединѣ полаго цилиндра (наподобіе жернова) H (ф. 146) коего вымѣрены діаметры ab, cd, и толщина надобно сыскать толстоту всего цилиндра и его полости, то оныхъ разность будетъ искомая толстота.

Подобно сему находится толстота и всякихъ въ срединѣ полыхъ прямыхъ и наклонныхъ призмъ.

* *

О измѣреніи толстоты пяти правильныхъ тѣлъ.

456. I. Толстота всякаго правильнаго тѣла равна произведенію его поверхности умноженной чрезъ $\frac{1}{3}$ перп

перпендикуляра изъ центра тѣла на одну его сторону или грань опущеннаго.

Доказ. Ибо явно, что вображая около правильнаго тѣла (подобно какъ около правилнаго полигона кругъ) описанную сферу, буде изъ центра оной ко всѣмъ угламъ проведутся линѣи, то есть радїусы сферы, то оное тѣло раздѣлится на столько равныхъ пирамидъ о сколкихъ оно есть граней; по тому что у оныхъ равныя основанїя и высоты, то есть перпендикуляры изъ центра на грани тѣла, или на основанїи пирамидъ опущенныя: а понеже (440) толстота каждой пирамиды равна произведенїю основанїя чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты; того ради толстота всѣхъ пирамидъ или тѣла равна произведенїю ихъ основанїи или поверьхности тѣла умноженной одною общею ихъ высотою.

Но для опредѣленїя помянутыхъ въ правильныхъ тѣлахъ высотъ по даннымъ сторонамъ слѣдующїя предложенїя знать надлежитъ.

457. II. Квадратъ бока AE (ф. 147) тетраедра равенъ шести квадратамъ трети дїаметра EH около онаго описанной сферы.

Доказ. Отъ верьха E къ центру C основанїя ABD тетраедра проведи линѣю CE, которая будетъ высота тѣла; ибо для равныхъ EA, EB, ED, точка E есть въ равномъ разстоянїи отъ угловъ A, B, D, кои также равно отстоятъ отъ центра C, а продолженная EH будетъ дїаметръ сферы. По томъ проведи AF, DF, и тако въ прямоугол. △. ADF, AF□ = AD□ + FD□; но дїаметръ AF = 2AC = 2DF, по сему

 AF

AF□ = 4 DF□, или 4 DF□ = AD□ + FD□, вычтя изъ того DF□ останется 3 DF□ = AD□ или AE□. Но въ прямоуг. △ AEC, AE□ = AC□ + EC□; положа 3 DF□ вмѣсто AE□ и DF□ за AC□, выдетъ 3 DF□ = DF□ + EC□; отнявъ DF□ выдетъ 2 DF□ = EC□. А по свойству круга ÷ CE. AC. CH, и тако CE□ или 2 DF□ : AC□ или DF□ :: CE : CH, того ради EC = 2 CH, но EH = 3 CH, и (216) ÷ EH. AE. CE. Посему EH или 3 CH : AE :: AE : CE или 2 CH, и тако (194) 6 CH□ = AE□.

Слѣдст. Iе. Квадратъ діаметра сферы къ квадрату бока тетраедра какъ 3 : 2; ибо EH□ : AE□ :: EH : CE :: 3 CH : 2 CH или какъ 3 : 2.

IIе. По данному боку тетраедра лѣхче показаннаго способа (451) можно сыскать его толстоту; ибо опредѣля діаметръ сферы, коего $\frac{2}{3}$ будетъ высота тетраедра, и проч.

458. III. Квадратъ діаметра сферы втрое больше квадрата бока кубуса въ немъ написаннаго.

Доказ. Представь въ кубусѣ діагонали AG, BE, (ф. 148) кои пересекутся въ центрѣ сферы въ H, и будутъ онѣ для равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ACG, BDE, ся діаметрами; ибо діагонали квадрата, BD, AC и бока ево DE, CG равныя: но AC□ = 2 BC□, или 2 CG□, и AG□ = AC□ + CG□, по сему AG□ = 3 CG□.

Слѣдст.

слѣдст. По заданному боку ексаедра найдется дїаметрѣ около ево описанной сферы и обратно.

459. IV. Квадратѣ дїаметра сферы вѣ двое больше квадрата бока октаедра вѣ оной сферѣ написаннаго.

Доказ. Ибо октаедрѣ по видимому раздѣляется на двѣ равныя четыреугольныя пирамиды, которыхѣ общее основанїе есть квадратѣ DFBG (ф. 149), а онаго дїагонали BD, GF пресеченныя вѣ центрѣ сферы E, или вѣ центрѣ ихѣ основанїя, будутѣ дїаметры сферы, и AC есть сумма высотѣ пирамидѣ AE, EC. Но вѣ прямоугол. △ AEF, AF□ = AE□ + FE□, или для AE = EF, AF□ = 2 EF□. А понеже FG = 2 EF, по сему FG□ = 4 EF□; и тако FG□ AF□ :: 4 EF : 2 EF или какѣ 2 : 1.

слѣдст. По данному боку октаедра скорѣе (451) можно сыскать онаго толстоту; ибо высоты его пирамидѣ суть радїусы около онаго описанной сферы.

460. V. Квадратѣ дїаметра сферы вѣ трое больше квадрата дїагоналя одной пятиугольной грани додекаедра вѣ оной сферѣ написаннаго.

Доказ. Понеже (383) додекаедрѣ составляется изѣ 12ти правильныхѣ пятиугольныхѣ граней, слѣдств. изѣ 12ти равныхѣ пирамидѣ имѣющихѣ верхи вѣ центрѣ сферы около додекаедра описанной,

а наклонныя ихъ бока равны радїусамъ оной. Смотря на вырезанной додекаедрѣ окажется въ немъ и въ тойже сферѣ вмѣщенной кубусъ, котораго каждая сторона дѣлается квадратомъ изъ четырехъ дїагоналей вмѣстѣ составленыхъ граней додекаедра, какъ ABCD (ф 150); того ради (458) квадратъ дїагоналя кубуса или дїаметра сферы въ трое больше квадрата бока кубуса, то есть, дїагоналя каждой грани додекаедра.

Слѣдст. Для вычисленїя толстоты додекаедра по данному боку надлежитъ сперва въ политонѣ V (250) сыскать дїагональ AB, а по оному (458) дїаметръ сферы, котораго половина или радїусъ будетъ бокъ одной изъ 12 ти пирамидъ. по томъ найди (451) въ оной толстоту и проч.

461. VI. Квадратъ дїаметра NE (ф. 151) сферы около икосаедра описанной въ пятеро больше квадрата радїуса MQ или NR круговъ около основанїи двухъ противныхъ толстыхъ угловъ описанныхъ.

Доказ. Да будутъ круги DFM, NOP описанныя около основанїй двухъ супротивныхъ пятиугольныхъ пирамидъ, изъ коихъ каждой высота равна AQ. По сему въ прямоугольномъ △ AQE, AE□ = QE□ + AQ□. Но AE есть бокъ пятиугольника а QE или радїусъ круга Z, бокъ шестиуг. и тако (235) AQ есть бокъ десяти

угольн.

угольн. въ томже кругѣ. По сему высота верхней и нижней пирамидъ равна боку десятіугольника По томъ изъ средины R дуги CD проведи RO, которая для CO = OD и CR = RD будетъ разстояніе двухъ равныхъ паралельныхъ круговъ Z, X Но въ прямоугольномъ △ RDO, OD□ = OR□ + RD□: а понеже OD есть бокъ пятіугольн. и RD, десятиугольника, по сему (235) RO будетъ бокъ шестиугольника, или = MQ радіусу круга. И такъ явно что діаметръ сферы состоитъ изъ двухъ боковъ десятіугольника, и радіуса круга Z или X. На конецъ въ прямоуголн. △ MNE, NE□ = ME□ + NM□, но ME = 2 MQ или 2 MN, по сему NE□ = 4 MQ□ + MQ□, то есть NE□ = 5 MQ□.

Слѣдст. для познанія толстоты икосаедра, по данному его боку, надлежитъ сперьва (297) сыскать радіусъ MQ, на томъ боку написаннаго полигона; а по оному уже найдется діаметръ сферы NE, котораго половина будетъ наклонной радіусъ всякой изъ 20 ти треугольныхъ пирамидъ икосаедръ состовляющихъ, а по сему (451) сыщется толстота пирамидъ и проч.

Примѣч. для лучшаго понятія показанныхъ свойствъ правильныхъ тѣлъ, надлежитъ при чтеніи смотря навырезанныя изъ бумаги о семъ рассуждать.

462. Задача. По данному діаметру сферы сыскать бокъ каждаго пяти правильныхъ тѣлъ въ оной сферѣ написанныхъ.

рѣш. 1е. Положа AE = $\frac{2}{3}$ AB діаметра сферы (ф. 152), и воставя перпенд. ED проведи прямую AD, которая будетъ бокъ тетраедра; ибо (216) ∺ AB · AD · AE, и по сему AB□ : AD□ :: AB : $\frac{2}{3}$ AB, или какъ 3 : 2. Слѣд. (457) AD есть бокъ тетраедра.

2е. Проведенная BD есть бокъ кубуса; ибо (216) ∺ AB · BD · BE. Но BE = $\frac{1}{3}$ AB, по сему AB□ : BD□ :: AB : $\frac{1}{3}$ AB, или какъ 3 : 1, и тако BD есть бокъ кубуса.

3е. Изъ цѣнтра C воставь перпендик. CF, тогда проведенная BF будетъ бокъ октаедра. Ибо AB□ = 4 CB□, а BF□ = 2 CB□, по сему AB□ = 2 BF□ (459).

4е. Раздѣля бокъ кубуса BD или діагональ пятіугольной грани додекаедра въ крайнемъ и среднемъ содержаніи въ I, тогда средняя BI будетъ (234) бокъ той грани додекаедра.

5е. Изъ точки A, на линѣе AB воставя перпендикул. AG = AB, проведи CG и AH, тогда AH будетъ бокъ икосаедра. Ибо спустя перпенд. HL, тогда для подобныхъ треугольн. CAG, CLH, и AG = 2 AC, будетъ LH = 2 LC, по сему HC□ или AC□ = 4 LC□ + LC□ = 5 LC□; того ради AG□

или

или AB□ = 5 HL□, посему (461) HL есть радїусъ круга Z икосаедра. Положа LM = HL, то для LH или LM = 2 LC будетъ MB = AL: а понеже дїаметръ сферы состоитъ изъ двухъ боковъ десятїугольника и радїуса круга Z или X, то (461) AL есть бокъ десятїугольника въ кругѣ радїуса LH. Но AH□ = AL□ + LH□, по сему (235) AH есть бокъ пятїугольника, то есть бокъ икосаедра.

На послѣдокъ положа дїаметръ шара въ 1000, стороны правильныхъ въ немъ написанныхъ тѣлъ будутъ весьма близко равны симъ числамъ: тетраедра 816, октаедра 707, кубуса 577, икосаедра 527, додекаедра 357: положа дїаметръ шара = 1, толстота его выдетъ (318 и 446) = 0·5236 и проч.

Сверьхъ того какъ для стереометрїи, такъ и для стереографїческой проекцїи небезполезно знать слѣдующее предложенїе.

463. Предл. Ежели конусъ ABLKC пересечь плоскостью DIEH (ф. 153) равнонаклонною къ основанїю LK и антипаралельно то есть какъ BA : AC :: AE : AD, тогда плоскость DIEH будетъ кругъ а не еллипсисъ.

Доказ. Назначь плоскость FIGH паралельно кругу LK, коя пресечетъ плоскость DIEH, въ линѣе IOH перпендїкулярно линѣямъ DE, FG. Понеже плоскость FIGH есть кругъ (434), по сему FO × OG = OI□. Но отъ сочиненїя треугольники GOE,

FOD

FOD подобныя; ибо $\angle GEO = DFO = \angle ABC$, и $\angle GOE = \angle DOF$, по сему (207) $EO : OG :: FO : DO$, и (194) $EO \times DO = FO \times OG$ (216) $= OI\square$; но когда OI есть средняя пропорц. между DO и OE, то сеченїе DIEH есть кругъ, ч. н. д.

слѣдст. I е. для сыску толстоты отрезан. конуса BCED надобно по высотѣ AN и основанїю DIEH найти (440) толстоту конуса ADE, кою вычтя изъ цѣлаго конуса ABC останется искомая толстота.

II е. кромѣ сего и паралельнаго основанїю инсе сеченїе какъ DIEH конуса будетъ еллипсисъ, о чемъ изтолковано въ коническихъ сеченїяхъ при концѣ сего сочїн. предложенныхъ, и о томъ какъ въ такихъ отрезан. конусахъ толстоту находить и проч.

464. примѣч. для познанїя толстоты неправильныхъ полїедровъ, какъ фортификацїонныхъ частей, корабельныхъ членовъ и другихъ многогранныхъ неправильныхъ тѣлъ, надлежитъ оныя дѣлить на призмы или пирамиды (454), подобно какъ для сысканїя площади въ неправильныхъ полигонахъ раздѣляются (287) оныя на треугольники: по томъ находить толстоту каждой призмы или пирамиды, которыхъ сумма будетъ толстота того полїедра. А для вычисленїя толстоты бочекъ, кадей котловъ, мачтовыхъ деревъ, кругловатыхъ кокоръ, болшихъ колоколовъ, мартиръ, пушекъ, и прочихъ кругловатыхъ великихъ неправильныхъ тѣлъ, надлѣжитъ ихъ раздѣлять на отрезанныя конусы, цилиндры, на части шара и предписанными правилами вычислять въ нихъ толстоты.

Способъ сысканїя толстоты и поверхности горъ показанъ будетъ впрѣдъ въ практической геометрїи.

Ежели

Ежели поліедрЪ случится малЪ и весьма неправиленЪ; на примѢрЪ чтобЪ узнать толстоту какой либо медной резной вещи и проч. тогда оная находится механически такимЪ средствомЪ: надлежитЪ то тѢло положить вЪ сосудЪ фигуры способной ко измѢренію, какЪ вЪ цилиндрической или призматической прямоугольной сосудЪ, и наполнить оной водою, пескомЪ или иною жидкостью которая бы немогла войти вЪ тѢло, потомЪ оное вынувши изЪ того судна, должно вымѢрить совершенную толстоту пустой части судна, которая весьма близко равна будетЪ толстотѢ того тѢла.

СверьхЪ сего, примѢры вычисленія толстоты многихЪ разныхЪ тѢлЪ показаны вЪ Арифм. Часть IV. гл. III. отдѢл. III.

* *

О сравненіи тѢлЪ по ихЪ толстотѢ.

465. Выше сего показано, что толстота всякаго тѢла есть произведеніе поверьхности его осью или высотою; а понеже поверьхность всегда (295) равна произведенію двухЪ измѢреній; то всякая толстота равна произведенію трехЪ измѢреніи; того ради,

466. I. Толстота какихЪ нибудЪ двухЪ тѢлЪ, между собою вЪ составномЪ содержаніи ихЪ трехЪ одноимянныхЪ измѢреніи (Ар. стр 349):

467. СлѢдст. равныхЪ призмЪ и цилиндровЪ основаніи суть вЪ обратномЪ содержаніи сЪ ихЪ высотами: и буде они вЪ такомЪ содержаніи, такія тѢла суть равныя. Тоже надобно разуметь о равныхЪ пирамидахЪ и конусахЪ.

468. II. Толстоты двухЪ подобныхЪ тѢлЪ, между собою вЪ утроенномЪ содержани, или какЪ кубусы ихЪ сходственныхЪ измѢреніи.

Доказ. Ибо у подобныхЪ тѢлЪ всѢ

сходственныя измѣренїи пропорцїональныя (397), чрезъ то ихъ толстоты суть произведенїи трехъ пропорцїональныхъ величинъ; по сему оныя (193) въ утроенномъ содержанїи какихъ нибудь двухъ сходственнымъ измѣренїй двухъ подобныхъ тѣлъ.

469. Слѣдст. Iе. толстоты верхушекъ отрезанныхъ отъ пирамидъ и конусовъ плоскостью паралельною ихъ основанїямъ, суть подобныя цѣлымъ тѣламъ, то есть въ утроенномъ содержанїи всѣхъ въ нихъ сходственныхъ измѣренїи.

470. IIе. толстоты сферъ суть въ утроенномъ содержанїи ихъ радїусовъ или дїаметровъ; посему ежели у сферы дїаметръ въ двое, въ трое и проч. больше дїаметра другой сферы, тогда той поверьхность будетъ въ 4, 9, разъ больше, а толстота въ 8, 27, и проч. разъ больше другой сферы. Во обще судно, котораго всякое измѣренїе въ двое, въ трое въ четверо, больше, всякаго сходственнаго измѣренїя въ другомъ суднѣ, то перваго толстота въ 8, 27, 64 и проч. разъ больше толстоты втораго.

471. IIIе. для сочиненїя подобнаго тѣла другому, котораго бы толстота была въ двое, въ трое и проч. разъ того болѣ, надлежитъ учинить чтобъ всякое измѣренїе искомаго тѣла ко всякому сходственному измѣренїю даннаго тѣла, было въ содержанїи какъ кубїч. радиксъ числа 2, 3 и пр. къ 1. А въ уменьшенїи обратно. Ибо подобныя тѣла въ содержанїи кубосовъ или кубичныхъ радиксовъ ихъ сходственныхъ измѣренїй (468).

472. Задача I. По заданной толстотѣ шара сыскать его дїаметръ.

Рѣш. Вычисли толстоту шара коего дїа-

діаметръ 113, по томъ здѣлай пропорцію: сія толстота къ данной какъ кубусъ числа 113 къ кубусу искомаго діаметра, чего радиксъ будетъ самой діаметръ. Иначе, 0.5236 къ данной толстотѣ, какъ 1, къ кубусу искомаго діаметра.

473. II. Сыскать діаметръ сферы, котораго толстота къ данной сферѣ какъ 5 : 7.

Рѣш. Раздѣля діаметръ данной сферы PG (ф. 138) въ содерж. 5 : 7, какъ Ph : hG, и между Ph и hG найди (244) двѣ средн. пропорц. изъ коихъ первая на примѣръ nm будетъ искомой діаметръ ибо (Ариф. ст. 358) куб. PG : куб. nm :: Ph : hG, или 5 : 7.

тожъ по вычисленію, учиня въ числахъ сію пропорцію 5 : 7, какъ кубусъ даннаго діаметра къ кубусу искомаго діаметра, котораго кубичной радиксъ будетъ величина сего діаметра.

474. III. Данную прямую призму въ кубусъ превратить.

Рѣш. Между сторонъ AB, BC (ф. 132) основанія призмы найди средн. пропорц. FG, а между оной и высоты CG двѣ средн. изъ коихъ первая какъ HL будетъ бокъ кубуса.

Доказ. Отъ сочин. $AB \times BC = FG\square$, а умножа оба члена высотою CG, будетъ $FG\square \times CG = AB \times BC \times CG$; но какъ $FG\square \times CG =$ HL кубусу, то есть кубусъ первой

изъ

изъ двухъ среднихъ пропорцїон. равенъ произведенїю квадрата перваго члена умноженнаго вторымъ изъ данныхъ (Ар. ст. 358). Слѣдст. призма AG = кубусу линѣи HI.

475. примѣч. шаръ, цилиндръ, конусъ и всякой полїедръ въ кубусъ (подобно какъ полигонъ въ квадратъ) въ числахъ способнѣе нѣжели по среднимъ пропорцїональнымъ превращать можно. Ибо кубичной радиксъ толстоты полїедра равенъ есть боку кубуса. А дїаметръ шара равнаго по толстотѣ какому либо полїедру находится чрезъ (472).

Такожде удобнѣе по вычисленїю можно складывать многїя тѣла въ одно, одно изъ другова вычитать или дѣлить, какое нибудь тѣло въ нѣсколко кратъ увеличить и проч. нежели помощїю среднихъ пропорцїональныхъ, кое излишнее мудрованїе въ разсужденїи многотруднаго и не точнаго дѣйствїя (какъ явствуетъ въ n. 473 и 474) презреть можно. напослѣдокъ сїю геометрїю показанїемъ славныхъ архимедовыхъ теоремъ оканчиваю.

476. I. Полсфера LMD (ф. 141) конуса тоже основанїе P и высоту DC имѣющаго толстотою въ двое больше.

Доказ. Ибо толстота полсферы и конуса равна произв. тогожъ круга P чрезъ $\frac{2}{3}$ CD и $\frac{1}{3}$ DC (440 и 443), по сему полсфера въ двое болѣ конуса.

Слѣдственно, толстота цилиндра LMFE, полсферы и конусъ LMD между собою какъ 3. 2. 1, также и цѣлой цилиндръ, сфера, и конусъ ADB.

477. II. Сфера къ равнобочному конусу pqD по толстотѣ какъ 32 : 9.

Доказ. Ибо bC = $\frac{1}{3}$ Dd, по сему Db:DC :: 3:2 или

или 9:6. но кругъ X къ кругу P (420) какъ 3:4 или 6:8, а кругъ X къ четыремъ кругамъ сферы какъ 6:32. по сему конусъ имѣющей основ. X высоту Db, то есть pDq къ конусу имѣющему основанїе 4P высоту CD (то есть къ толстотѣ сферы) въ сложномъ содержанїи изъ 9:6 и 6:32, или какъ 9:32.

478. III. Толстота равнобочнаго конуса NGK, восмеро больше конуса pDq.

Доказ. Ибо для равноб. треуг. NGK, pDq, прямоугольныя треугольн. NdK, pbD подобныя, и по сему NK : pD :: Kd : Db или NG : pq; но Kd = 2 Db, то и NG = 2 pq. слѣдст. конусъ NKG подобнаго себѣ pqD толстотою восмеро больше. притомъ же и сфера Q восмеро больше сферы LDMd; ибо Kh = 2 Dd (479).

479. IV. Сфера къ равнобочному конусу около его описанному какъ 4 : 9.

Доказ. Сфера LDMd къ конусу pDq (477) какъ 32 : 9, а конусъ pDq къ конусу NGK (478) какъ 1 : 8 или 9 : 72, и такъ отъ равности членовъ, сфера LDMd къ конусу NGK какъ 32 : 72, или 4 : 9.

480. Слѣдст. конусъ и цилиндръ около сферы описанныя, и самая сфера толстотою и поверхностїю находятся въ полуторномъ содержанїи; ибо (411) цилиндръ поверхн. и толстотою къ сферѣ какъ 3 : 2 или 6 : 4, а (420) конусъ къ сферѣ какъ 9 : 4, и такъ оной же конусъ къ цилиндру какъ 9 : 6. по сему всѣ три оныя тѣла между собою какъ числа 9 · 6 · 4, то есть въ полуторномъ содержанїи.

КОНЕЦЪ ГЕОМЕТРїИ.

ЕЛЕМЕНТЫ

ПЛОСКОЙ ИЛИ ПРЯМОЛИНѢЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ

* * * * * * * * * * * * * * * *

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІИ.

§ * §

Плоская тригонометрія, или измѣреніе сторонъ и угловъ прямолинѣйныхъ треугольниковъ, есть наука къ практической геометріи принадлежащая, и показуетъ правила какъ по тремъ даннымъ изъ шести частей треугольника, то есть, изъ трехъ сторонъ и трехъ угловъ находить вычисленіемъ (либо посредствомъ масштабовъ и циркуля) величину изъ прочихъ трехъ которыя нибудь части.

2. Примѣч. Сіе сказано по той причинѣ, что всякой треугольникъ кромѣ его площади, (о которой разсуждали въ планометріи) состоитъ изъ шести частей, то есть изъ трехъ угловъ да изъ трехъ сторонъ. Притомъ буде знаемы два угла, то третей простымъ вычитаніемъ находится (г. 117): а по тремъ угламъ треугольника не величина его сторонъ, но только взаимное ихъ содержаніе по сей наукѣ опредѣляется; ибо несмѣтное число равноугольныхъ треугольниковъ могутъ быть неравныя, но только подобныя между собою (г. 130) 3.

3. Правила тригонометрическаго вычисленія состоятъ въ произведеніи изъ трехъ данныхъ три первыя члена пропорціи, а искомый членъ бываетъ четвертымъ: но понеже стороны треугольниковъ съ ихъ углами въ простомъ содержаніи быть не могутъ; ибо стороны измѣряются линѣями, какъ то аршинами, саженьми, верстами и проч. а мѣры угловъ суть дуги круга. и тако принуждено вмѣсто угловъ или дугъ ихъ размѣряющихъ градусами, минутами и проч. ставить въ пропорціи величины разныхъ прямыхъ линѣй, кои тѣ дуги или углы представляютъ и бокамъ треугольниковъ пропорціональны. Того ради о сихъ линѣяхъ прежде всего истолковать надлежитъ.

4. Ежели отъ верха C (ф. 1) какова нибудь угла ACB произвольно взятой величины радіусомъ AC написать кругъ AHah, и AC продолжить до a, а въ C поставить перпенд. CH; тогда явно, что уголъ BCH или дуга HB есть комплементъ или дополненіе угла ACB, или дуги AB, также и угла BCa или дуги BHa: а уголъ BCa или его дуга Ba есть суплементъ или приполненіе угла ACB или дуги AB. Обратно BA комплементъ дуги HB, а суплементъ дуги aB.

5. Перпендикуляръ BD изъ конца B радіуса и дуги AB размѣряющей уголъ ACB на другой радіусъ AC проведенный, называется синусъ дуги AB или угла ACB. Перпендикуляръ AE, изъ конца A одного

 радіуса

радїуса до встречи съ другимъ продолженнымъ воставленный, имянуется тангенсъ тоя же дуги АВ. Прямая СЕ есть секансъ сея дуги. Часть AD радїуса содержимая между дугою и синусомъ называется синусъ верзусъ или обратной синусъ дуги АВ. Перпендикуляръ BI есть синусъ дополненїя дуги АВ, а перпенд. НК ея же есть тангенсъ дополненїя. СК есть секансъ дополненїя, а HI есть синусъ верзусъ дополненїя тояже дуги АВ.

Синусы, тангенсы дополненїя и проч. для сокращенїя называются косинусы, котангенсы, косекансы, косинусы верзусы. Также вмѣсто радїуса ставилъ я здѣсь R. Син. вмѣсто синуса. Танг. значитъ тангенсъ. Кос. изъявляетъ косинуса. Кот. син. верз. значатъ котангенсъ, синусъ верзусъ.

6. Изъ сихъ опредѣленїевъ слѣдуетъ I е. Синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ и проч. тупаго угла ВСа суть тѣже какїя его суплементы остраго угла АСВ. Ибо изъ конца В или а одного радїуса не можно инуды опустить перпендикуляра какъ токмо на продолженїе другова, каковы BD и ad: также кромѣ АЕ или ae тангенсомъ иная быть не можетъ; ибо для равныхъ треугольниковъ aCd, BCD и Cae, CAE; ad = BD, ae = AE, дуга BH комплем. дуги aB, равно и дуги АВ. По сему явно

что

что BI есть косинусъ дуги aB, и HK сеяже дуги aB котангенсъ.

7. IIе. Синусъ ED дуги AB есть половина хорды BG дуги BAG двойной противъ дуги AB (г. 69).

8. IIIе. Пребольшїй изъ всѣхъ синусовъ, есть синусъ прямаго угла HCA; ибо оной тогда есть самый радїусъ, и для того онъ называется цѣлой синусъ.

9. IVе. Синусы по мѣрѣ увеличиванїя ихъ угловъ прибываютъ или возрастаютъ отъ 0 до 90°, и равнымъ образомъ умаляются отъ 90° до 180°.

10. Vе. Синусъ дуги 30° равенъ полрадїусу; ибо радїусъ есть (г. 167) хорда дуги 60°, а (7) всякой синусъ есть половина хорды двойной дуги. По сему въ прямоугольн. △ кѣ бокъ противной углу 30 гр. равенъ его полуипотенузѣ; ибо есьли ACB = 30°, тогда BG = BC, а BD ихъ половина.

11. VIе. Тангенсы и секансы равномѣрно съ углами возрастаютъ отъ 0 до 90°: но тангенсы и секансы 90° не опредѣленны; понеже радїусъ CH прямаго угла HCA съ тангенсомъ AE хотя безконечно продолжатся, сойтись не могутъ (г. 49).

12. VII с. Тангенсъ 45° равенъ радїусу; ибо буде уголъ ACB = 45°, то △ CAE будетъ равнобедренный, и AE = AC (г. 125).

13. VIII с. Синусъ верзусъ AD дуги AB коя меньше 90 гр. равенъ разности между радїусомъ CA и косинусомъ CD = BI, а его косинусъ верзусъ HI есть разность между радїуса CH и синуса CI = BD, а синусъ верзусъ суплементъ Da = суммѣ радїуса и косинуса DC угла ACB.

14. Въ тригонометрическихъ выкладкахъ въ мѣсто данныхъ и искомыхъ угловъ поставляются соотвѣтствующїя имъ прямыя линѣи, то есть, ихъ синусы, тангенсы, косинусы или котангенсы, по разнымъ случаямъ, въ которыхъ оныя линѣи бокамъ треугольниковъ бываютъ пропорцїональныя, и отъ знанїя только сихъ случаевъ, наука тригонометрическаго вычисленїя зависитъ: и тако чтобъ можно удобнѣе учинить оное переложенїе, надлежитъ здѣлать таблицы готовыхъ выкладокъ, въ коихъ бы можно вдругъ найти величину синуса, косинуса, тангенса, и проч. каждаго градуса и минуты всѣхъ возможныхъ острыхъ угловъ (ибо тупыхъ угловъ по ихъ суплементамъ извѣстны). Сїи таблицы подъ имянемъ таблицъ синусовъ знаемы, въ коихъ радїусъ круга, размѣряющаго всякой уголъ положенъ = 100000, и по сему на каждой градусъ и минуту показанъ тамъ синусъ, косин. тангенсъ и проч.

Вотъ краткое изъясненїе по какимъ правиламъ сочинены или можно сочинить оныя таблицы.

ОСНОВАНІЯ

* *

ОСНОВАНІИ ДЛЯ СОЧИНЕНІЯ ТАБЛИЦЪ СИНУСОВЪ.

15. I. дуги AB (ф. 1) зная одну изъ четырехъ вещей аименно ея синусъ, косинусъ, синусъ версусъ, косинусъ верзусъ, найдется особно каждая изъ прочихъ трехъ вещей.

Ибо явно (1. 214) что CD = √(CB□ — BD□) или кос. = √(R□ — сін. □). DA = CA — CD или син. верз. = R — кос, HI = CH — CI или — син. BD угла ACB, или кос. верз. = R — син. и проч.

16. II. знаючи дуги AB, синусъ BD, косинусъ CD найдется оной тангенсъ AE, котангенсъ HK, секансъ CE и косекансъ CK.

Понеже для подобныхъ треугольниковъ CDB, CAE, CIB, CHK, будетъ CD : BD = AC : танг. AE, и BD или CI : CD или BI = CH : котанг. HK, то есть, кос : син = R : танг. и син : кос = R : котанг. Также CD : CB = CA : CE, или кос : R = R : секан. и CI : CB = CH : CK, или син : R = R : коссекансу дуги AB.

17. Слѣдст. I с. Тангенсы дугъ своимъ котангенсамъ обратно пропорціональныя; ибо AE : CA = CH или CA : HK, то есть, танг : R = R : котанг. Сего ради да будутъ две дуги A и B, тогда R□ или RR =

танг. A × кот. A, и RR = танг. B × кот. B, и танг. A × кот. A = танг. B × кот. B, по сему танг. A : тан. B = кот. B : кот. A.

18. IIе. Косинусы двухъ дугъ A, B ихъ секансамъ также обратно пропорціональныя; ибо кос. A : R = R : сек. A, по сему RR = кос. A × сек. A, и RR = кос. B × сек B, того ради кос A : кос B = сек. B : сек A. Изъ сего явствуетъ, что секансы дугъ отъ 0 до 90 гр. прибавляются въ одномъ содержаніи какъ ихъ косинусы убавляются.

19. III. даннымъ синусомъ и косинусомъ дуги найдется синусъ половинной дуги и двойной.

Ибо, 1 е. проведя хорду BA (ф. I) данной дуги AB, изъ C опусти перпендикуляръ CF, то для знаемыхъ уже BD, DA, будетъ (г. 213) BA = √(BD□ + DA□). По сему FA или $\frac{1}{2}$ хорды. = $\frac{1}{2}$ √(син. □ + син. верз. □). 2 е. Взявъ AN за данную дугу, тогда для подобныхъ треугольниковъ FCA, DBA будетъ CA : CF = AB : BD, или R : кос. дуги = двойн. син : син. двойной дуги.

20. IV. Сыскавъ синусы и косинусы двухъ дугъ, найдется синусъ оныхъ суммы и разности.

1 е. Принявъ за данныя дуги ab, be, тогда въ подобныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ enm, nmo, oCr, bCp, будетъ

Сb;

Cb : Cp = ne : me, и Cb : Cn = bp : nq или mr. По сему em + mr = er синусу суммы дугъ.

2е. Взявъ за данныя дуги ae, ab, будетъ Cp : Cr = bp : ro; но re — ro = oe. Потомъ Cb : Cp = oe : ne = синусу разности данныхъ двухъ дугъ.

21. V. Сумма синуса KM дуги KA (ф. 2) коя меньше 30 гр. и произведенія квадр. радикса числа 3 синусомъ KI разности между сею дугою и 30 гр. равна FN дуги FA коя, тѣмъ больше 30 ти гр. чемъ дуга KA есть меньше 30 ти град.

Пусть дуга AB = 30 гр. и BF = BK, тогда для подобныхъ треугольниковъ SIF, SQG, уголъ IFS = GQS = BCA = 30 гр. и тако уголъ KFG = 30 гр. и (10) GK = ½ FK = IK = FI. Но FK□ — GK□ = FG□, или 4 IK□ — IK□ = FG□. По сему 3 IK□ или IK□ × 3 = FG□, а извлѣча квадратныя радиксы выдетъ IK × V 3 = FG, и IK × V 3 + KM = FN.

22. VI. Сумма синуса FT дуги HF коя, меньше 60 гр. и синуса FI ея разности съ дугою 60 гр. равна синусу KO дуги HK столько превышающей дугу 60 гр. чемъ HF оной меньше.

Ибо для FI = GK, будетъ FT + GK = KO. По сему на примѣръ, син. 55 гр. + син. 5 гр. = син. 65 гр.

23. По средствомъ показанныхъ предложеній можно сыскать всѣ синусы, полагая радіусъ круга

размѣряющаго всякой уголъ = числу 1000000000. Ибо узнавъ (10) синусъ 30 гр. найдется (15 и 19) синусъ 15 гр. $7\frac{1}{2}$ гр. $3\frac{3}{4}$ гр. и такъ далѣе раздѣляя пополамъ до 12 го дѣйствія, и чрезъ оное выдетъ дуги 52 сек. 44 терціи $3\frac{3}{4}$ кварты синусъ 2556609, которой съ своею дугою безъ чуствительной погрѣшности сходствуетъ, и потому такія дуги своимъ синусамъ бываютъ пропорціональныя: того ради 52 сек. 44 тер. къ син. 2556609 = дуга 1 м. къ син. 2908882. знавъ синусъ 1 м. найдется (19) двухъ, потомъ (20) трехъ, четырехъ, пяти и проч. до 30 гр. а послѣ (21) отъ 30 гр. до 60 гр. наконецъ (22) отъ 60 гр. до 90 гр. Послѣ сего тангенсы и секансы весьма уже легко найдутся (16).

Примѣч. Синусы, тангенсы и секансы для краткости не всѣ поставлены въ таблицахъ синусовъ въ россіи напечатанныхъ, аимянно по 3 послѣднихъ цыфровъ уничтожены, и еще изъ остальныхъ по двѣ отдѣлены за пятою для удобнѣйшаго ихъ употребленія въ надлѣжащихъ вычисленіяхъ.

* *

О вычисленіи логарифмовъ синусовъ, тангенсовъ и проч.

24. Понеже въ выкладкахъ тригонометрическихъ для лучшей способности (ибо синусовъ, тангенсовъ и проч. умноженіе, логарифмами ихъ перемѣняется въ сложеніе, а дѣленіе въ вычитаніе) нынѣ употребляются, только логарифмы синусовъ, тангенсовъ и проч. и логарифмы числъ изъявляющіхъ величины сторонъ треугольника; того ради въ предписанныхъ таблицахъ синусовъ поставлены ихъ логарифмы, а съ начала логарифмы натуральныхъ чиселъ отъ 1. до 10000, коихъ сочиненіе въ Ариф. части V. гл. III довольно истолковано, а сихъ здѣсь покажемъ.

25. Въ таблицахъ синусовъ положенъ радїусъ или синусъ цѣлой = 10000000000 частямъ, по сему указатель логарифма радїуса есть 10. И тако посредствомъ логарифмовъ чиселъ сысканы соотвѣтствующїя логарифмы синусамъ, тангенсамъ и проч. На примѣръ 1е. Логарифмъ синуса 3907311284 дуги или угла 23 гр. найдется (Арїѳ. стр. 383) слѣдующимъ образомъ.

логар. числа	3908000000	9.5919546
	3907000000	9.5918434
	1000000	1112
1000000 — 1112 —	311284	(346 346
логарифмъ синуса 23 гр.		9.5918780.

2е. По сему удобно сыщется логарифмъ танг. котанг. и секанса дуги 23 гр. и проч.

Логар. син. 23 гр.	9.5918780	20.0000000
лог. радїуса.	10.	9.6278519
	19.5918780	10.3721481 логар.
логар. кос. 23 гр.	9.9640261	котанг. 23 гр.
логар. танг. 23 гр.	9.6278519	

ибо (17) $\frac{RR}{\text{танг.}}$ = котанг.

лог. квадр. радїуса то есть двойн. радїуса	20.0000000
логар. косин. 23 гр. —	9.9640261
логар. секанса 23 гр. —	10.0359739

Ибо (18) $\frac{RR}{\text{кос.}}$ = секансу.

О употре-

* *

О употребленіи логарифмовъ синусовъ и проч.

26. Какъ изъ таблицъ для вычисленія выбирать противъ градусовъ, и градусовъ съ минутами соотвѣтствующія логарифмы ихъ синусамъ, тангенсамъ и проч. то уповательно читатель и безъ показанія самъ узнаетъ.

Но понеже логарифмы во многихъ таблицахъ синусовъ, показаны только на градусы и минуты, а въ нѣкоторыхъ иностранныхъ чрезъ 10 секундъ: и тако буде случится по строгости вычисленія сыскать логарифмъ синуса, напримѣръ 57 гр. 38 м. 46 сек. по обыкновеннымъ таблицамъ, то надобно вычислять по сему правилу:

логар. синуса 57 гр. 39 м.	9.9267514
57 38	9.9266714
на 1	разн. 800
60 сек. : 800 :: 46 сек : 613	613
логар. син. 57 гр. 38 м. 46 сек.	9.9267327

2 е. Противъ даннаго логарифма тангенса 10.3377531, градусы и проч. находятся тако:

логар.

логар. шанг: 65 гр. 20 м. | 10 . 3379566 | 10 . 3377531
                        65   19 | 10 . 3376235 | 10 . 3376235
                        на 1 м. | разн. 3331 | 1296

3331 —— 60 сек. —— 1296 (23 $\frac{1}{3}$ сек.

По сему данной логарифмъ тангенса соотвѣтствуетъ дугѣ или углу 65 гр. 19 м. 23 $\frac{1}{3}$ сек.

27. Сїе правило сыскивать логарифмъ на секунды, служитъ токмо въ точности почти отъ 20ти до 90 градусовъ; потому что разность логарифмовъ между минутъ малыхъ дугъ отъ 1 м. до 20 гр. между собою весьма не пропорцїональны; того ради показано здѣсь правило, какимъ образомъ такимъ дугамъ вычислять соотвѣтственныя точныя логарифмы. На примѣръ чтобъ сыскать синусовой логарифмъ 1 гр. 25 м. 30 сек. то надлежитъ сперва вычесть,

изъ синус. логар. на 1 гр. 26 м. | 8 . 3981793
                логар. 1 гр. 25 м. | 8 . 3931008
                                                50785

По томъ приведя въ секунды 1 гр. 26 м. = 5160 сек. и 1 гр. 25 м. = 5100 сек. слѣдуетъ правило,

какъ логар. на 5160. | 8 . 3981793 | 8 . 3931008.
къ син. логар. 1 гр. 26 м. | 3 . 7075702 | 8 . 3930998.
а логар. числа. 5100 | 12 . 1057495 | разность 10.
                                | 3 . 7126497
къ логар. - - - - | 8 . 3930998

А послѣ

А послѣ, логар. числа 5160	8.3981993
къ логариф. синуса 1 гр. 26 м.	2.7101174
а логар. даннаго числа 5130 сек.	12.1082907
= 1 гр. 25 м. 30 сек.	3.7126497
къ синусову логар. на 1 гр. 25 ми. 30 сек.	8.3956470
половина разности 10 ти.	+ 5

точной логар. синуса на 1 гр. 25 м. 30 сек. 8.3956475 которой съ сысканнымъ по общему правилу на 1 гр. 25 м. 30 сек. 8.3956390 разнится въ 85. однако въ сихъ случаяхъ съ довольною точностью можно употреблять только послѣднюю пропорцію, какъ въ сыскѣ логарифмовъ на одни секунды показано.

На примѣръ найти логарифмъ синуса и котангенса дуги 37 сек. тогда слѣдуетъ,

Логар. числа 60 сек. = 1 м.	6.4637261
	1.5682017
къ логар. синуса 1 м.	8.0319278
а логар. синуса 37 сек.	1.7781512
къ логар. числа 37 сек.	6.2537766
Логар. числа 60 сек.	13.5362739
къ логар. котанг. 1 м.	1.7781512
логар. числа 37 сек.	15.3144251
	1.5682017
къ логар. котангенса дуги или	13.7462234

угла 37 Сек. или тангенса. 89 г. 59 м. 23 сек. сіе находится обыкновенно по свойству оныхъ логарифмовъ обратнымъ тройнымъ правиломъ.

28. Ежели потребно противъ какого либо логарифма сыскать точную соотвѣтствующей дуги величину, какъ на примѣръ 1 е. Противъ логарифма тангенса 8.5143894; тогда слѣдуетъ сей логарифмъ пріискать

искать въ тангенсовыхъ логарифмахъ, и найдется оной между 1 гр. 52 м. и 1 гр. 53 м. потомъ,

логар. танг. 1 гр. 53 м. 8. 5143894
логар. танг. 1 гр 52 м. 8. 5130978

12916 12916
логарифмъ 3. 8273693 на число 6720 сек. = 1 гр. 52 м.

3. 8286509 = 6740 сек. = 1 гр. 52 м. 20 сек. искомая величина дуги противъ тангенса даннаго логарифма.

2 с. Чтобъ найти приличную дугу синусовому логарифму 4. 3172073, то надобно учинить сію пропорцію:

Синусовой логар. 1 м.	1. 7781512
къ логар. числа 60 сек. = 1 м.	4. 3172073
а данной логар.	6. 0953585
	6. 4637261
къ дугѣ 0. 4282 сек. - - -	0. 6316324
60.	

искомая дуга 25. 6920, или почти 26 терціи

29. Сіи предписанныя правила о логарифмахъ занеимѣніемъ большихъ съ секундами тригонометрическихъ таблицъ, въ точныхъ вычисленіяхъ съ пользою употреблять можно, а особливо въ астрономическихъ: того ради для скорѣйшаго вычисленія въ таковыхъ случаяхъ слѣдующія логарифмы въ пополненіе обыкновеннымъ логарифмическимъ таблицамъ сообщаю.

ССК.

сек.	логар. синусовъ.		сек.	логар. тангенсовъ.
1	4.6855749	466123.5	1	4.6855749
10	5.6855749	и проч.	10	5 равны
20	5.9866049		20	5 синусовымъ.
30	6.1626961		30	6 логарифмамъ.
40	6.2876349		40	6
50	6.3845449		50	6

* *

Общія предложеніи тригонометрическаго вычисленія

30. I. Во всякомъ треугольникѣ синусы угловъ противолежащимъ его сторонамъ пропорціональны.

Доказ. буде начертить кругъ около треугольника, то каждой бокъ будетъ хорда двойной дуги размѣряющей противной уголъ (г. 87); а каждая половина хорды или бока есть (7) синусъ противнаго угла: но половины цѣлымъ своимъ величинамъ пропорціональны (г. 192); по сему и стороны треугольника съ противолежащими углами пребываютъ всегда въ одномъ содержаніи.

31. Слѣдст. I. въ прямоугольномъ △ радіусъ къ ипотенузѣ, какъ синусъ одного остраго угла къ противной своей сторонѣ (8 и г. 111).

32. II. въ прямоугольн. △ къ косинусъ одного остраго угла есть синусъ другова, и тако (30) синусъ одного угла къ своему косинусу, какъ противолежащей бокъ сему углу, къ другому боку. но (16) синусъ къ косинусу, какъ тангенсъ къ радіусу: по сему въ прямоуг. △ танг. одного угла къ радіусу какъ противолеж. бокъ сему углу къ другому боку.

33.

33. III. по даннымъ тремъ угламъ треугольника не величину его сторонъ но ихъ содержанїе узнать можно; ибо можетъ здѣлаться несмѣтное число неравныхъ подобныхъ треугольниковъ, кои будутъ равноугольныя, и оныхъ найдется одно содержанїе сторонъ, потому что они синусамъ противолежащихъ себѣ угловъ пропорцїональныя.

34. IV. всякаго прямоугольнаго △ C A B (ф. 3) буде изъ угловъ C, B написать дуги какимъ нибудь радїусомъ и провесть перпендикуляры LK, DE и HI, GF представляющїя синусы и тангенсы угловъ C, B сторонамъ треугольника C A B пропорцїональныя, то симъ средствомъ всѣ случаи прямоугольныхъ треугольниковъ, и притомъ разными пропорцїями рѣшить можно, какъ ниже явствуетъ.

Ибо 1 е. Знавъ того △ ка уголъ C и бокъ CA сыскать бокъ AB. Тогда для подобныхъ треугольниковъ ABC, CLK, CDE, BIH, BFG произходятъ слѣдующїя пропорцїи (г. 207). CD : DE = CA : AB, то есть R : танг. ∠C = CA : AB, и GF : FB = CA : AB или котанг. C : R = CA : AB, напослѣдокъ (30) кос C : AC = син. C : AB, или перемѣня (г. 196) пропорцїю есть кос. C : син. C = AC : AB.

2 е. тогоже △ C A B знаючи углы и одинъ бокъ CA сыскать ипотенузу.

По сему DC : AC = CE : CB, то есть R : AC = сек. C : CB, или R : сек. C = AC : CB, либо IH : HB = AC : CB, син. B : R = AC : CB или син. B : AC = R : CB. Сверхъ того еще GF : GB = AC : CB или танг. B : сек. B = AC:

АС : СВ, либо танг. В : АС = сек. В : СВ.

3 е. даны бока АС, АВ сыскать ипотенузу СВ.

Тогда ВС = V (АС□ + АВ□), или иначе, АС : АВ : : СD : DЕ, то есть, СА : АВ : : R : танг. С а по сему найдется и СВ (34).

4 е. даны, ипотенуза ВС, бокъ АВ сыскать бокъ АС.

Тогда АС = V (ВС□ − АВ□), или = $\frac{1}{2}$ лог. (ВС + АВ) + $\frac{1}{2}$ лог. (ВС − АВ). Иначе, СВ . СК : : АВ : LК; или СВ : R : : АВ : син. ∠С, по томъ (34).

35. примѣч. посредствомъ предписанныхъ правилъ и прочихъ онымъ подобныхъ можно рѣшить всякой прямоугольной треугольникъ по всѣмъ заданіямъ, коихъ не больше 21 имѣется: а для скорости въ вычисленіи надлежитъ какъ возможно такія пропорціи употреблять, въ коихъ бы радіусъ находился; ибо тогда оныя только однимъ сложеніемъ или вычитаніемъ дѣлаются, вычитая или складывая указатель 10, логарифма радіуса съ цѣлыми логарифмовъ прочихъ частей треугольника, какъ явствуетъ въ послѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ. Даны прямоугольнаго △ ка АВС; (ф. 3) бокъ АВ, 145 какихъ либо равныхъ частей, уголъ С, 37 гр. 17 м. сыскать ипотенузу ВС, и бокъ АС.

Тогда (30) син. С, 37 гр. 17 м. |
къ боку АВ, 145 12 . 1613680 сумма лог.
R, 90 гр. | 9 . 7822984 числа 145 и
къ ипотенузѣ ВС, 239. 4 = 2. 3790696 радіуса.

R.

λ. - -	
ипотен. BC	2.3790696
кос. угла C	9.9007219

бокѣ AC, $190\frac{1}{2}$ 2.2797915 разн. лог. бока AC и радïуса.

рѣшенïе тояже задачи чрезѣ синусы.

Син. 37 гр. 17 м. AB, R.

60575.70 ——— 145 ——— 100000

100000

60575.7) 14500000 (239.4 B

1211514

2384860

1817271

5675800

5451813

R. BC

100000 ——— 239.4 ——— 79564.97

79564.97

19047853.818 сïе раздѣля на 100000 то есть отмѣтя сѣ правой стороны 5 цыфровѣ, выдетѣ 190.4785 или почти $190\frac{1}{2}$ = AC.

Изѣ сего видно что оное вычисленïе многодѣлнѣе прежняго.

* *

Вычисленïе прямоугольныхѣ треугольниковѣ.

36. Для облегченïя дѣйствïя вычислять прямоуг. треугольники, одинѣ △CAB (ф, 3) полагаю, на которой вѣ слѣдующей таблицѣ показаны пропорцïи или правила, кои во всѣхѣ случаяхѣ сего вычисленïя могутѣ быть употребительны,

	даны	сыскать	пропорціи или правила вычисленія.
1	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{}(AB\square + AC\square)$ или AB : AC :: R : танг. B, послѣ син. B : R :: AC : BC
2		B	AB : AC :: R : танг. B.
3		C	AC : AB :: R : танг. C.
4	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{}(BC\square - AB\square)$ или лог. AC = $\frac{1}{2}$ л. (BC + AB) + $\frac{1}{2}$ л. (BC − AB)
5		B	BC : AB :: R : кос. B.
6		C	BC : AB :: R : син. C.
7	BC, AC	AB	$AB = \sqrt{}(BC\square - AC\square)$ или лог. AB = $\frac{1}{2}$ л. (AC + BC) + $\frac{1}{2}$ л. (BC − AC).
8		B	BC : AC :: R : син. B.
9		C	BC : AC :: R : кос. C.
10	AB, B	AC	R : танг. B :: AB : AC.
11		BC	косин. B : R :: AB : BC.
12	AB, C	AC	R : кот. C :: AB : AC.
13		BC	син. C : R :: AB : BC.
14	AC, B	AB	R : котанг. B :: AC : AB.
15		BC	син. B : R :: AC : BC.
16	AC, C	AB	R : танг. C :: AC : AB.
17		BC	косин. C : R :: AC : BC.
18	BC, B	AB	R : косин. B :: BC : AB.
19		AC	R : син. B :: BC : AC.
20	BC, C	AB	R : син. C :: BC : AB.
21		AC	R : кос. C :: BC : AC.

37. Всѣ оныя пропорціи основаны на слѣдст. I и II. (31 и 32) для всѣхъ случаевъ прямоугольн. треугольниковъ, изъ коихъ 1 е, 4 е и 7 е рѣшены по сему (г. 213) что квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадр. двухъ сторонъ. но какъ вычисленіе квадратовъ не столь удобно, то первое правило переложено въ двѣ пропорціи, а 4 е и 7 е рѣшены логарифмами, что изъясняется тако: полсумма логарифмовъ суммы и разности ипотенузы и одного бока, есть логар. другаго бока. Сіе основано на томъ что $BC\square - AB\square = (BC + AB) \times (BC - AB)$ посему (Ариф. ст. 372) логар. $(BC + AB)$ + лог. $(BC - AB)$ = лог. $AC\square$ = 2 лог. AC (Ариф. ст. 373). Также доказывается и седьмое правило.

38. II. Во всякомъ треугольникѣ, какъ произведеніе боковъ содержащихъ искомый уголъ къ произведенію полсуммы трехъ боковъ умноженной разностью между той полсуммы и противнымъ искомому углу бокомъ, такъ квадратъ радіуса къ квадрату косинуса половины угла искомаго.

То есть ежели въ △ ADE (ф. 4) искомый уголъ есть A, тогда $AE \times AD : \left(\frac{AE + AD + DE}{2}\right) \times \left(\frac{AE + AD + DE}{2}\right) - DE$, такъ $RR : \square$ кос. половины угла DAE.

Доказ. 1 е. Уголъ A, раздѣли пополамъ прямою AG, а изъ D къ оной здѣлай перпендикуляръ DB, и будетъ (г. 133) $AD = AB$, по сему $BE = AE - AB$ или AD = разности сторонъ.

2 е. Чрезъ C проведи CM паралельно къ прямой DE, тогда (г. 206) $CF = FM = \frac{1}{2}$

 DE

DE и BF = FE полразности, по сему AF есть полсумма боковъ AE, AD.

3е. Чрезъ точки M, E проведи прямую линѣю до G, а изъ точки F разстоянїемъ CF, или FM опиши кругъ, которой для (г. 89) прямаго угла CGM (ибо (г. 138) MG паралельна къ BC) перейдетъ чрезъ G. Но FH = CF = $\frac{1}{2}$ DE, по сему AH = $\frac{AE + AD + DE}{2}$, и AL = $\left(\frac{AE + AD + DE}{2}\right)$ — DE.

4е. Потомъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC, AEG, будетъ (36) AB : AC = R : кос, ∠ BAC = $\frac{1}{2}$ ∠ DAE, и AE : AG = R :: кос, $\frac{1}{2}$ ∠ EAD.

По сему (г. 197) AB или AD × AE : AC × AG или (г. 221) AH × AL = RR : квадр. косин. $\frac{1}{2}$ угла DAE; и положа косин. $\frac{1}{2}$ ∠ DAE = Z, будетъ AD × EA : AH × AL :: RR : ZZ, или (г 196) AD × AE : RR :: AH × AL : ZZ, и тако $\frac{RR}{AD \times AE} = \frac{ZZ}{AH \times AL}$, и $\frac{RR}{AD \times AE}$ × AH × AL = ZZ, или $\frac{R}{AD} \times \frac{R}{AE}$ × AH × AL = квадрату косинуса $\frac{1}{2}$ ∠ DAE.

39. Слѣдст. По заданнымъ сторонамъ треугольника какой ниесть его уголъ найдется по сему правилу: надлежитъ вмѣстѣ сложить два арифметическїя дополненїя двухъ сторонъ содержащихъ искомой уголъ, (ибо разность между логарифмомъ радїуса и логарифмомъ какого либо числа называется онаго

оннаго арифметическое дополненїе) логарифмъ полсуммы трехъ сторонъ и логарифмъ разности между оной полсуммы и стороны противной искомому углу, то полсумма оныхъ четырехъ логарифмовъ будетъ косинусъ половины вопроснаго угла.

Инаше, изъ угла D (ф. 4) на основанїе AE опусти перпендикуляръ DI, потомъ сыскавъ (г. 230) части основенїя AI, IE, найдутся (36) въ прямоугольныхъ треугольникахъ AID, IED углы A, E и проч.

40 Лемма или приуготовл. Ежели какихъ либо двухъ чиселъ полразность сложить съ ихъ полсуммою, то оныхъ сумма равна большему числу, а разность между полсуммы и полразности равна меньшему.

Доказ. Пусть AB (ф. 5) большее количество а BC меньшее. Положа $AD = BC$, будетъ BD ихъ разность, раздѣля DB пополамъ въ E, выдетъ $DE = BE$, ихъ полразность, и $AD + DE = BC + BE$, посему AE = полсуммѣ. Слѣдственно $AE + EB = AB$, есть большее, а $AE - ED = (AD =) BC$, есть количество меньшее, и притомъ $AB - AE = DE$ = полразности.

41. III. Во всякомъ треугольникѣ ABC, (ф. 6) такъ сумма двухъ боковъ $AB + BC$ къ разности оныхъ $AB - BC$, такъ тангенсъ полсуммы угловъ C, A, тѣмъ бокамъ противолежащихъ къ тангенсу полразности оныхъ угловъ.

Доказ. Изъ B разстоянїемъ меньшаго

бока BC начертя дугу, продолжи AB до G, проведи CD и къ ней паралельную AH пока встретитъ продолженную CG въ H, тогда для BC = BG, будетъ AG = AB + BC, и AD = AB − BC. Но (г. 118) ∠GBC = BCA + CAB = BCD + BDC, а (г. 125) ∠BDC = BCD = полсуммѣ угловъ A, C, и (40) ∠DCA = CAH оныхъ полразности. По томъ ежели въ треугольникѣ отъ сочиненія прямоугольномъ GAH, линѣю AH взять за радіусъ, то GH будетъ тангенсъ ∠ HAG, а CH тангенсъ ∠ HAC. Но для паралельныхъ AH, CD, есть (г. 206) GH : CH :: GA : DA. По сему GA : DA :: танг. ∠ GAH или BDC : танг. ∠ CAH или DCA.

Иначе. 1 е. Изъ точки D проведи DK паралельно къ CG: но какъ ∠ GCD отъ сочиненія прямой, то DK будетъ перпендик. къ CD. Положа CD за радіусъ будутъ CG, DK въ одномъ содержаніи съ тангенсами полсуммы и полразности угловъ CDG, DCK. Слѣдст. для паралельныхъ DK, CG (г. 206) GA : DA :: GC : DK.

2 е. Продолжа BA (ф. 7) положи AH = AC, AI = BA, будетъ BH сумма, а IH разность сторонъ AB, AC. Соединя CH, опусти на

нея

нея перпенд. AE, будетъ (г. 126) CE = EH и ∠ CAE = EAH = полсуммѣ угловъ B + BCA. Проведя AD, IG паралельно къ BC, выдетъ ∠ DAH = большему ∠ B, а ∠ CAD = меньшему ∠ BCA. Учиня HF = CD проведи AF, тогда въ равныхъ треугольникахъ CAD, HAF, ибо CA = AH, CD = HF и (г. 125) ∠ ACD = AHF, по сему (г. 134) ∠ HAF = CAD = BCA. Слѣдст. ∠ DAF = DAH − HAF = B − BCA = разности угловъ: но для AD = AF, ∠ DAF и линѣя DF перпендикуляромъ AE раздѣлены пополамъ, отъ чего ∠ DAE = EAF = полразности угловъ B, BCA. Напослѣдокъ, для паралельныхъ IG, DA, BC и BA = AI; CD = DG = HF (г. 206). Отнявъ общую FG останется DF = GH, слѣдст. $\frac{1}{2}$ GH = $\frac{1}{2}$ DF = DE. Изъ A радїусомъ AE начертя кругъ, будетъ EC тангеснъ угла CAE = полсуммѣ, а ED = тангенсу угла DAE = полразн. угловъ B, ACB. По сему HB : HI :: HC : HG :: $\frac{1}{2}$ HC : $\frac{1}{2}$ HG :: EC : ED.

Сїе доказателство какъ видно долше первыхъ двухъ, но предписанной леммы не требуетъ.

42. Примѣч. Вышедоказанную пропорцїю можно раздѣлить въ сїи двѣ, какъ малеишей бокъ BC (ф. 8) къ большему BA такъ радїусъ къ танг. угла изъ коего должно вычесть 45 гр. Потомъ радїусъ къ

танг. остатка, такъ танг. полсуммы угловъ А и С къ танг. ихъ полразности.

Доказ. Положа $BP = PT = BC$, потомъ $PM = BA$, тогда $TM = AB - BC$. Проведи BN коя бы здѣлала $\angle NBA = 45$ гр. а изъ точекъ T, M на BN опусти перпендикуляры TK, MN, и соедини KP. Тогда треугольники BKP, BKT, BNM суть прямоуголныя равнобедренныя и подобныя, по сему $BK = KT$, $BP = PK = PT = BC$, и $BN = NM$. Сіе приготовя, въ прямоуг. $\triangle PKM$, есть (32) PK или $BC : PM$ или $AB ::$ R: танг. $\angle PKM$. Вычтя 45 гр. изъ сего угла останется $\angle TKM = KMN$. Но (32) R: танг. $\angle KMN :: MN$ или $BN : KN ::$ BM или $AB + BC : TM$ или $AB - BC ::$ танг. $\frac{A+C}{2}$: танг. $\frac{A-C}{2}$ (41).

* *

ВЫЧИСЛѢНІЕ КОСОУГОЛЬНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ

43. Зная выше изъясненныя предложенія можно вычислять косоугольныя треугольники по всѣмъ случаямъ которыхъ не больше шести имѣется какъ въ нижепоказанныхъ задачахъ явствуетъ.

44. Задача I. Въ треугольникѣ ABC (ф. 6) даны AB, BC и уголъ C сыскать уголъ A. Тогда (30) AB: сін, $C = BC$: сін, A.

45.

45. II. Знаючи, AB, BC и уголѣ C, сыскать бокѣ AC, и ∠ A. Тогда (30) AB: син, ∠ C = BC: син, ∠ A.

По томѣ A + C вычтя изѣ 180 останется ∠ B, и тако син. A : BC = син. B : AC.

46. III. Даны углы A, C и бокѣ BC, сыскать бокѣ AB.

Сін, ∠ A : BC = син. ∠ C : AB (30). Сыскавѣ ∠ B, также найдется и третья сторона AC.

47. IV. Знаючи стороны, AB, 136. BC, 94 и уголѣ B, 123 гр. 36 м. сыскать углы A, C (ф. 6).

Тогда (41) AB, 136 ∠ B. 123 г. 36 м.
BC, 94 супл. 56 24 сумма.
сумма 230 28 12 = $\frac{A+C}{2}$.
разность 42
логар разн. 42 | 1.0791812 потомѣ 28 гр. 12 м.
шанг. 28 гр. 12 м. | 9.7293230 1 36 м. 9 сек.
10.8085042 ∠ C, 29 гр. 48 м. 9 сек.
лог. сум. 230, 2.3617278 ∠ A, 26 35 51
логар шанг. 8.4467764 полразности угловѣ A, C 1 гр. 36 м. 9 сек.

Ежели потребно по томужѣ заданію сыскать третей бокѣ AC, то прежде должно найти углы, а послѣ чрезѣ I. задачу найдется и бокѣ AC.

48. Примѣч. Сію задачу кромѣ вышепоказанныхѣ (41 и 42) правилѣ можно рѣшить третьимѣ способомѣ тако: изѣ точки C на продолженіе AB (понеже ∠ ABC тупой) опусти перпенд. CE, и вѣ прямоуг. △ CBE зная величину CB и ∠ CBE: найди (36) CE, BE потомѣ вѣ прямоуг. △ CAE даны CE и AE сыщется ∠ A и проч. И такѣ явно

что

что сїе вычисленїе потруднѣе перваго (47).

49. V. Даны три стороны треугольника ABC, (ф. 8) сыскать его углы.

Тогда (г. 230) $AC : AB + CB = AB - CB :$ AD разность частей AE, CE. потомъ $\frac{AC - AD}{2} = CE =$ меньшей части, а $DE + DA = AE$ большей части. напослѣдокъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ CEB, BAE знаючи стороны CB, CE и AB, AE найдутся (36) всѣ углы треугольника ABC.

По томужъ заданїю, CB, 48. AB, 60. AC, 86: искомый уголъ C.

Тогда (38) $\frac{RR}{AC \times BC} \times \frac{AB + AC + BC}{2} \times \frac{AB + AC + BC}{2} - AB =$ квадрату косинуса $\frac{1}{2}$ угла C, то есть,

логар. AC, 86 | 1.9344984 AB, 60
BC, 48 | 1.6812412 BC, 48
3.6157396 AC, 86
лог. RR, 20.0000000 194
16.3842604 97 = $\frac{1}{2}$ суммы
лог. числа 97, 1.9867717 AB, 60
лог. числа 37, 1.5682017 $37 = \frac{AB + BC + AC}{2} - AB.$
19.9392338
$\frac{1}{2}$ = 9.9696169 логар. кос. $\frac{1}{2}$ угла C 68, гр. 49 м.
син. $\frac{1}{2}$ угла C 21 11
искомый $\angle C =$ 42 22

50. Примѣч. для сыску величины угловъ по извѣстнымъ сторонамъ равнобедреннаго треугольника, надлежитъ его раздѣлить (перпендикуляромъ) на два равныя прямоугольныя треугольника и найти (36) въ нихъ углы. Проч-

Прочїя предложенїи примѣрами изъяснить показалось ненужно; ибо учащемуся зная предписанныя правила, треугольники по разнымъ заданїямъ самому рѣшить уже не трудно.

* *

ПРИБАВЛѢНІЕ

РАЗНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЬ.

51. I. Какъ тригонометрическїй мастабъ сочинить, то есть линеямъ хордъ, синусовъ, тангенсовъ и проч.

Рѣш. 1 е. Произвольной величины радїусомъ, напримѣръ въ 3 дюйма, какой на Англискихъ футовыхъ шкалахъ, начерти полкруга aHA (ф. 9), и четверть окружности AH раздѣли на 18 равныхъ частей то есть чрезъ 5 гр. (г. 167).

2 е. Проведи линѣю AH, содержащую хорду 90 гр. Поставя одну ногу циркуля въ точкѣ A, перенеси на черту AH всѣ хорды A 5, A 10 и проч. такимъ образомъ линѣя хордъ или хордовой мастабъ начертится.

3 е. Изъ точекъ раздѣленной дуги AH, спущенныя на радиусъ CA перпендикуляры или къ радиусу CH паралелли раздѣлятъ радиусъ CA въ синусы считая отъ C къ A

чрезъ

чрезъ 5, а счисляя отъ А къ ... всему діаметру покажутъ синусы верзусы отъ 5 до 180 гр.

4 е. Изъ центра С чрезъ точки дуги АН, проведенныя линѣи раздѣлятъ перпендикуляръ AG, на тангены чрезъ 5, какъ А 5, А 10 и проч.

5 е. Проведенныя линѣи отъ точки а или по линейке къ а и къ концамъ тангенсовъ прилагаемой, раздѣлится радіусъ СН на полтангенсы С 5, С 10 и проч.

6 е. Отъ точки С, перенеси напродолженной радіусъ СН, секансы С 5, С 10 и проч. тогда получите линѣю, какъ CI секансовъ С 5, С 10 и проч.

7 е. Раздѣля дугу аН, на 8 равныхъ частей, и проведя 90 вую хорду аН, перенеси на нѣя хорды, какъ а 1, а 2, и проч. По сему линѣя аН, здѣлается мастабомъ румбовъ, и полрумбовъ буде дуга аН на 16 частей раздѣлится и проч.

8 е. Равнымъ образомъ, ежели дугу аН на 6 или 12 равныхъ частей раздѣля перенесть хорды на линѣю аН, то оная будетъ 6 ти часовой мастабъ, раздѣленной на часы и получасы; ибо 6 час. = 90 гр.

послѣ

ПослѢ того на бумаги, на деревѣ или на мѣди, назначь по числу тѣхъ линѣй, при общемъ къ нимъ перпѣндикулярѣ паралелныя линѣи, и на оныя перенеси тѣ здѣланныя мастабы, при томъ должно полагать секансы на одну черту съ синусами, по тому что оныя начинаются послѣ цѣлаго синуса 90 гр. И такъ сочинится общей угломѣрной мастабъ, помощїю котораго купно съ Геометрическимъ (г. 246) всѣ возможныя тригонометрическїя задачи почертежу безъ вычисленїя рѣшить можно. Оной же мастабъ съ лучшею точностїю дѣлается посредствомъ геометрическаго мастаба и табличныхъ натуральныхъ синусовъ, танг. и проч. токмо на линѣю хордъ должно класть двойныя синусы (7). Для точнѣйшаго начертанїя фигуръ нежели по мастабу хордъ, величина оныхъ хордъ, противъ каждыхъ 10 м. градуса показана въ присобщенной къ концу сея книги табличкѣ.

52. II. Позаданной величинѣ радїуса круга сыскать бокъ какого нибудь въ немъ вписаннаго полигона и обратно,

Рѣш. Надлежитъ сперва сыскать полугла у центра того полигона (г. 37)

въ примѣрѣ ECI, пятиугольника (г. ф. 32) а по оному и радiусу CD, въ прямоугольн. △ къ IDC наидется (36) ID = ½ ED, и перпенд. IC. По сему ежели радiусъ 5 тиугольника величиною въ 5 саж. 4 ф. или 39 ф. тогда бокъ онаго будетъ 45. 84, ф. и апотемъ 31. 55. ф. Обратно, знаючи ∠ ECI, у центра и половину стороны полигона ID сыщутся радiусъ CD, и апотемъ CI (36).

напримѣръ, пусть ED, будетъ бокъ 12 ти угольника = 56 футамъ, тогда:

логар. син. угла ECI 15 гр.	1. 4471580
къ боку ID, 28. ф.	10.
а логар. прям. угла	11. 4471580
къ ипотенузе CD,	9. 4129962
180. 2 фута.	2. 0341618

по томъ CD □ — ID □ = CI □ или, иначе;

прям. угол. 90 гр.	2. 0341618
къ CD,	9. 9849438
а син. угла D, 75 гр.	2. 0191056
къ лин. CI. =	
104. 5 фута.	

53. Слѣдст. По заданному боку или радiусу помощiю тригонометрiи площадь всякого правильнаго полигона точнѣйшимъ геометрическаго способомъ опредѣлить можно; ибо ID × CI = площади △ CDE, которую умножа 12 ю выдетъ 35112 □ ф.

или

или 716 □ саж. 28 □ ф. площадь мнимаго 12 ти угольника.

54. III. въ прямоуг. треугольникѣ ABC даны, острой уголъ и одно изъ прочихъ частей сыскать стороны треугольника.

Рѣш. 1е. Ежели онаго даны угла, A, C (ф. 10) и сумма боковъ AB+BC: тогда на продолженное основанїе AB положи мненїемъ BD = BC, отъ чего углы D и BCD, будутъ по 45 гр. и AD = AB + BC. И такъ въ △ кѣ ADC, по знаемымъ угламъ, и линѣи AD найдется (30) AC: а по ней и чрезъ углы въ △ ABC, опредѣлится (30) и величина боковъ AB, BC.

По чертежу, воставя перпенд. AE = AD = AB + BC, по извѣстному углу A проведи AC, потомъ опусти перпендик. CB.

2е. Когда даны угла да разность AB — BC = AD (ф. 11), тогда мысленно положа BD = BC проведи CD: потомъ въ △ кѣ ADC, по знаемымъ угламъ и боку AD, найдется (30) ипотенуза AC, а по ней въ △ ABC можно сыскать бока BC, AB.

3е. Естьли даны AB + AC, (ф. 12) и ∠ A въ такомъ случаѣ, на продолженной линѣе AB, положа AD = AC, будетъ BD = AB + AC,

AC, а ∠ D или (г. 125) DCA = ½ ∠ BAC: по сему вѣ △ BDC, найдется бокѣ DC, а по оному и ∠ A, сыщется величина сторонѣ AB, AC.

4е. буде извѣстна величина AC — BA да углы A, C, то положа AD = AB, проведи BD (ф. 13) и будетѣ DC = AC — AE, а ∠ ADB или ABD = $\frac{180 \text{ гр.} - A}{2}$. Но ∠ DBC есть компл. угла ABD. По сему вѣ △ BDC найдется (30) бокѣ BC, а по оному и угламѣ A, C узнаются AB, AC.

55. IV. какого нибудь треугольника, ABC (ф. 14) даны угла да сумма его сторонѣ, сыскать оныя порознь.

Рѣш. Представте себѣ, что на продолженномѣ основанiи AB положены DA = AC, BE = BC, и проведены DC, EC: тогда линѣя DE равна будетѣ суммѣ сторонѣ, а углы D, E для помянутыхѣ равныхѣ линѣй суть половины данныхѣ угловѣ A, B, по которымѣ и по основанiю вѣ △ DEC, найдется DC (30). Потомѣ вѣ равнобедр. △ DAC зная DC и углы сыщете бокѣ AC, а по оному и угламѣ вѣ △ ABC узнаете стороны AB, BC.

Для рѣшенiя однимѣ чертежемѣ, положи сѣ мастаба равныхѣ частей линѣю

DE

DE = суммѣ сторонъ, и къ ней по транспортиру или похордовому мастабу (51) припиши углы D, E, равныя половинамъ данныхъ угловъ A, B. По томъ линѣи DC, CE раздѣля (г. 66) перпендикулярами пополамъ проведи AC, FC, и такъ здѣлается заданной △ ABC. Доводъ явенъ отъ сочиненія.

56. V. даны углы да площадь какого нибудь треугольника опредѣлить величину его сторонъ.

Рѣш. Посредствомъ мастабовъ начерти треугольникъ равноуг. данному, и смѣря высоту найди его площадь. Иначе, противъ данныхъ угловъ возми изъ таблицъ синусы, и здѣлавъ изъ оныхъ треугольникъ, которой будетъ подобной заданному; ибо синусы угловъ суть пропорціональны съ противолежащими боками: по томъ во ономъ треугольникѣ найди (г. 296) площадь. На конецъ учиня сію пропорцію, какъ оная площадь къ данной, такъ квадратъ одного синуса къ квадрату бока соотвѣтствующаго ему въ данномъ треугольникѣ, коего сысканной радиксъ, будетъ искомая сторона (г. 298), а прочія чрезъ а. 30.

57. VI. по извѣстнымъ угламъ ACD, DCB. (ф. 15) и частямъ AD, DB основанія AB, опредѣлить точку C.

Рѣш. Около треугольника ABC означѣ мнимой кругъ ACBE, и продолжа CD проведи AE, BE, тогда въ △ ABE, будетъ ∠ ABE = ∠ ACE, а ∠ EAB = ∠ ECB (г. 90). Въ △ ABE чрезъ углы A, B и бокъ AB, найдется (30) EB. По томъ въ △ EBD, зная величину линѣй EB, DB, и ∠ EBD получите (45) уголъ EDB = ADC. По извѣстнымъ угламъ и бока AD въ △ ADC, найдется (30) AC, DC также и BC, и чрезъ то положенїе точки C опредѣлится.

По чертежу, должно съ мастаба положить линѣю AB, и къ ней по хордѣ приписать ∠ EAB = ∠ DCB, а ∠ ABE = ACD. По томъ чрезъ точки A, B, E начерти кругъ (г. 100), тогда продолженная линѣя ED, опредѣлитъ на окружности точку C, а по проведенїи линѣй AC, BC и данныя угла ACD, DCB, какъ то изъ сочиненїя явствуетъ.

58. VII. Въ треугольникѣ ABD (ф. 16) даны, AB, перпендикул. DC и ∠ ADB опредѣлить точку D и сыскать прочїя части треугольника.

Сочин. Линѣю AB принявъ за хорду начерти на ней часть круга, въ коей бы всякой уголъ равенъ былъ данному ADB (г. 105). Въ разстоянїи CD проведи (г. 62) EF паралельную

ралельную къ AB, пресекающую окружность въ D. Изъ D на продолженіе AB опустя перпендик. DC проведи AD, BD: и такъ оная фигура начертится, и найдется чрезъ мастабы величина каждой ея части.

Для вычисл. Проведи радїусы HA, HB, HD и HG паралельно къ AC: тогда въ прямоугольн. △ кѣ AIH, зная ∠ AHI = ∠ ADB (г. 88) и AI = ½ AB найдется AH и перпенд. HI. Но DC — GC (или — HI) = DG: по сему въ прямоуг. △ кѣ HGD зная величины HD, DG найдется (36) HG = IC, изъ коей вычтя IB останется BC. На конецъ въ прямоугольн. △ кѣ BCD извѣстны BC, CD, сыщется (36) ∠ CBD и проч.

Примѣч. Чтобъ въ заданіи перпенд. CD былъ меньше нежели IK = IH + HD: притомъ же въ мѣсто перпенд. CD для лучшаго навыкновенія въ рѣшеніи разныхъ таковыхъ предложеніи, можно къ даннымъ AB и ∠ ADB придать знаемую величину DL съ ∠ L или съ ∠ BDL, либо линѣю BL съ ∠ L, котораго сторона DL пересекала бы окружность AKDB.

59. VIII. даны стороны треугольника CBA сыскать линѣи CO, AO, BO, по заданнымъ угламъ AOC, AOB (ф. 17, 18 и 19).

рѣшеніе сея задачи можетъ быть по тремъ случаемъ. По первому, ежели сумма угловъ, то есть AOC + AOB = 180, тогда точка O придетъ на линѣе CB (ф. 17). По сему для опредѣленія ея вычисленіемъ, надлежитъ сыскать (49) ∠ B: по томъ знаючи въ △ AOB, углы да бокъ AB, сыщутся (30) OA, OB и чрезъ то опредѣлится мѣсто точки O.

По чертежу, надлѣжитъ съ мастаба (г. 246) начертить сперьва данной треугольникъ ABC, и на хордѣ AB по транспортиру или со шкала написать (г 105) данной ∠ AOB. Иначе, начертя ∠ HIC = данному ACC, проведи AO паралельно къ HI.

2 е. Естьли сумма тѣхъ угловъ будетъ меньше 180 (ф. 18), тогда точка O придетъ внѣ треугольника: въ такомъ случаѣ представь, что чрезъ точки O, B, C описанъ кругъ и проведены линѣи CO, AO, OB и CD, BD. По сему ∠ BOA = BCD, а ∠ ACC = CBD (г. 90). Зная углы и бокъ CB, въ △ BCD, получите величину линѣи CD, BD. По сысканному (49) углу B въ △ CBA, выдетъ ∠ CBA — CBD = DBA. Имѣвъ ∠ DBA и бока DB, AB, въ △ DBA, найдется

(47)

(47) ∠ DAB. Потомъ въ △ кѣ OAB, по извѣстнымъ угламъ и боку AB, сыщутся BO, AO. Напослѣдокъ въ △ AOC, посредствомъ CO, AO и угла COA найдется OC (30).

А чтобъ точку O однимъ чертежемъ опредѣлить, то слѣдуетъ на линѣе BC, положить со шкала ∠ CED = ∠ COA, а ∠ ECD = ∠ BOA, и чрезъ точки B, D, C означить кругъ, тогда продолженная линѣя AD, покажетъ на окружности искомый пунктъ O и проч.

3 е. Но когда сумма данныхъ угловъ AOB, AOC случится быть больше 180, тогда точка O придетъ въ самомъ △ кѣ CEA (ф. 19). Решенїе сего случая вычисленїемъ и чертежемъ, какъ умному читателю очевидно есть, во всемъ подобно второму случаю.

60 IX. Отрѣска круга NEK (г. ф. 3) знаема величина хорды NK и высота RE сыскать онаго площадь.

Рѣш. Соверша отрѣзокъ въ кругъ (г. 102) продолжи RE до D, и сыскавъ центръ C, (г. 101) проведи радїусы CN, CK. Потомъ 1 е, надлѣжитъ по сей пропорцїи RE : NR :: NR : RD (г. 219) сыскать полдїам. CN или

СК. 2 е. Въ равнобедр. $\triangle$ кѣ NKC по извѣстнымъ сторонамъ, найдется (50) $\angle$ NCK. 3 е. Учини пропорцїю 360 гр. къ углу NCK, такъ окружность сысканная (г. 318) по дїаметру ED, къ дугѣ NEK, 4 е. Сыскавъ площадь въ $\triangle$ NKC, и (г. 291) сектора NCKEN, коихъ разность будетъ искомая площадь предложеннаго отрѣска NEK.

61 X. Треугольникъ abc, (ф. 20) коего даны стороны ac, bc и $\angle$ c перенесть на данную лїнѣю HI.

Сочин. Изъ какой либо точки данной линѣи какъ A проведя по изволенїю прямую AK, отмѣть на ней AD = ac. Здѣлавъ $\angle$ D = c и положа DE = cb проведи AE, коя равна будетъ ab (г. 134). Отъ точки A положи AB = AE, а изъ C и B разстоянїемъ AD и DE учиня пересечку дугъ въ C проведи AC, BC, и тако на линѣе HI здѣланъ $\triangle$ ABC = $\triangle$ abc (г. 132).

62 · XI. Содержанїе дїаметра къ окружности его круга опредѣлить.

Рѣш. Понеже синусъ съ тангенсомъ противъ одной минуты во таблицахъ между собою не разнятся до семи дробныхъ чиселъ: того ради положа, за дїаметръ 200000, синусъ дуги одной минуты будетъ 29.0888212, или (7) полстороны впи-

саннаго

саннаго во ономъ кругѣ 10800 ти угольника, что можно безъ чувствительной погрешности полагать за 21600 ю часть всея окружности, и по тому оной окружности выдетъ 628318. 54. Слѣдственно дiаметръ къ своей окружности въ содержанiи есть какъ 200000 къ 628318.54, или раздѣля на 2 выдетъ 100000: 314159.27, а въ малыхъ числахъ какъ 100:314. Но полагая по Мецiеву * изобретенiю дiаметръ 113 частей найдется весьма блиско истинной окружности 355 частей чрезъ слѣдующую пропорцiю:

100000 — 314159.27 — 113
113
354.9999751 или почти 355.

* Адрiанъ мецiусъ уроженецъ города Алкмѣра въ Голландiи, которой жилъ около начала 17 столѣтiя.

* *

Описанiе о пропорцiонномъ циркулѣ

63, пропорцiонной циркуль или просто секторъ есть инструментъ состоящеи изъ двухъ мѣдныхъ либо деревянныхъ линѣякъ, коихъ два конца соединены вмѣстѣ шалнеромъ, и около гвоздика какъ центра движутся, то есть разсходятся и сжимаются, и тѣмъ они на подобiе геометрическаго сектора (г. 68) разной величины углы составляютъ. На обѣихъ сторонахъ оныхъ линѣякъ нарезаны или напечатаны различныя мастабы, а именно:

1 е. Говоря о Англискихъ пальмовыхъ секто-

рахъ, какія есть въ морскихъ училищахъ, 1 е. линѣя или мастабъ равныхъ частей означенной литерою L, раздѣленъ на 10 имельче равныхъ частей, и оной вмѣсто геометрическаго мастаба употребляется.

2 е. линѣя хордъ (C) раздѣлена по полукругу, котораго радіусъ длиною въ полсектора или равенъ разстоянію отъ центра сектора до хорды 60 гр.

3 е. линѣя синусовъ (S) натуральныхъ раздѣлена по томужъ радіусу.

4 е. линѣя тангенсовъ (T) до 45 гр. намѣчена по томужъ радіусу.

5 е. не большая линѣя тангенсовъ (t) отъ 45 гр. до 75 гр. раздѣлена по кругу, котораго радіусъ близь 2 хъ дюймовъ и употребляется въ дополненіе линѣи тангенсовъ T.

6 е. по томужъ малому радіусу назначена линѣя секансовъ (sec) отъ 10 гр. до 75 гр. въ равномъ разстояніи отъ центра сектора съ линѣею t.

7 е. линѣя полигоновъ (P) отъ 6 до 12 сторонахъ намѣчена съ раздѣлу окруженія, котораго радіусъ въ половину длины сектора или по радіусу хорды 60 гр. и оныя части послѣ къ сей хордѣ паралельно положены.

8 е. на ономъ же секторѣ во всю его длину имѣются 3 линѣи, а имянно линѣя (N) нумеровъ или чиселъ отъ 1 до 10, или до 100, раздѣлена помощію геометрическаго (г. 246) мастаба и логарифмовъ тѣхъ чиселъ: по оной линѣе всякія геометрическія пропорціи рѣшить можно.

9 е. линѣя синусовъ (sin) а другая танг. (tan) равнымъ образомъ раздѣляются по томужъ мастабу и посредствомъ логарифмовъ синусовъ и тангенсовъ за простыя числа съ онаго взятыхъ. Помощію сихъ линѣй и линѣи нумеровъ, всякія тригонометрическія пропорціи безъ вычисленія только циркульною мѣрою рѣшить можно.

оныя

оныя же линѣи и на гантирскомъ * шкалѣ, то есть на двухъ футовой деревянной Англиской линѣйкѣ, какія у насъ въ употребленіи имѣются наряду съ прочими, какъ то съ линѣями синусовъ верзусовъ меридіональныхъ градусовъ и проч. кои потому же основанію раздѣляются какъ и секторныя: притомъ на другой сторонѣ сего шкала, тоже и на футовомъ, есть линѣя называемая мили длины (M L) съ приложенною хордою, оной сочиненіе и употребленіе также и прочихъ линѣй по ихъ надобности въ надлежащихъ мѣстахъ обстоятельно истолковано въ кн. IV и V бугеровой навигаціи при Морскомъ же Корпусѣ напечатанной 1764 года.

Польза отъ употребленія помянутаго сектора состоитъ въ томъ, что онъ вмѣсто всѣхъ разной величины простыхъ и угломѣрныхъ мастабовъ одинъ служитъ, ежели измѣряемая величина непревосходитъ длину всего сектора; ибо по растворенію онаго всякая линѣя, которая меньше его длины, раздѣляется на какія нибудь равныя части, а чрезъ линѣи хордъ, син. танг. и проч. на немъ назначенныхъ, находятся по разнымъ радіусамъ надлежащія хорды, син. тант. и проч. употребленіе, и сочиненіе сектора основано на сей геометрической истиннѣ (г. 207), что по разнятіи сектора линѣя a d (ф. 21) содержащая хорду, синусъ, или тангенсъ какова нибудь числа градусовъ къ своему радіусу a c, такъ d e хорда, синусъ или танг. къ своему радіусу c b. Ибо оныя части по мѣрѣ своихъ радіусовъ прибавляются и умаляются.

Ежели угодно по сектору какую нибудь линѣю, какъ A B (г. ф. 57) раздѣлить въ примѣръ на 5 равныхъ частей, то надобно взять циркулемъ сію

* Едмундъ Гантиръ Профессоръ Астрономіи въ Грезамской Коллегіи, около 1724 года издалъ сочиненіе сихъ логарифмическихъ мастабовъ.

Черту

черту и разнять секторъ такъ, чтобъ оная помѣстилась между линѣй равныхъ частей на числахъ 50 или 100 удобныхъ къ раздѣленїю ея на 5 равныхъ частей; потомъ снятое циркулемъ разстоянїе между 10 и 10 то есть пятой части числа 50ти будетъ пятая часть линѣи AB.

когда данная линѣя случится больше длины обѣихъ половинокъ сектора, тогда надлежитъ оную раздѣлить по изволенїю на нѣсколько частей и каждой части искать пятую часть, то сумма всѣхъ пятыхъ частей линѣи, на какїя раздроблена сперва данная линѣя, будетъ оной искомая пятая часть. употребленїе сектора въ тригонометрическихъ выкладкахъ показано особливо въ II части кн. V вышепомянутой навигацїи.

въ прочемъ на нѣкоторыхъ секторахъ кромѣ вышеописанныхъ линѣй имѣются пропорцїональныя линѣи площадей, толстотъ правильныхъ тѣлъ, вѣса мѣталловъ и проч.

Конецъ Тригонометрїи.



ЕЛЕМЕНТЫ

* * * * * * * * * * * * * * * *
* *
* * * * * * * * * * * * * * * *

ЕЛЕМЕНТЫ СФЕРИКИ

* * * * * * * * * * * * * * * *

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІИ.

Сферика или наука о сферѣ до Астрономіи, гномоники и Географіи принадлежащая, и толкуетъ о взаимномъ положеніи и о размѣреніи дугъ круговъ на поверхности сферы изображенныхъ.

Ежели кругъ AEBD (сф. ф. 1) около неподвижнаго діаметра A B обратить, то выдетъ сфера или шаръ (г. 371), а концы хордъ ED, GF, IH прямостоящія къ A B опишутъ круги, коихъ діаметры равны симъ хордамъ. по сему всякое сѣченіе сферы плоскостью есть кругъ (г. 374).

2. Діаметръ сферы къ плоскости какого либо на ней круга прямостоящіи, называется ось сего круга, а оба конца оси имянуются полюсы онаго круга. по сему точки A, B суть полюсы круговъ описанныхъ на сферѣ концами хордъ ED, FG, IH и проч.

3. большой кругъ сферы есть тотъ, которой отъ своихъ полюсовъ равно отстоитъ: какъ кругъ концами E, D діаметра ED

описанной

списанной есть въ равномъ разстоянiи отъ его полюсовъ А, В, то есть въ 90 гр. считая по поверхности сферы.

4. Слѣдст. Каждой большой кругъ сферы имѣетъ особливыя два полюса. По сему одна точка не можетъ быть общимъ полюсомъ двухъ большихъ круговъ.

5. Малыя круга сферы суть тѣ, кои отъ своихъ полюсовъ неравно отстоятъ; яко круги, коихъ дiаметры FG, HI и проч.

6. Дiаметръ каждаго большаго круга проходитъ чрезъ центръ сферы: но дiаметры всѣхъ малыхъ круговъ минуютъ сего центра. По сему центръ сферы есть общей центръ всѣхъ большихъ круговъ, и плоскость каждаго большаго круга раздѣляетъ сферу на двѣ равныя части, а отъ плоскости малыхъ круговъ раздѣляется въ неравныя.

7. Паралельныя круга сферы суть тѣ малыя круга, коихъ плоскости суть паралельныя къ плоскости большаго круга, какъ круги дiаметровъ FG, HI суть паралельны кругу коего дiаметръ ED.

8. Всѣ паралельныя круга на сферѣ имѣютъ общiя полюсы, и можно ихъ признавать за односрединныя съ большими кругами, и разсѣкаются на подобныя дуги, большими

большими кругами чрезъ общїя ихъ полюсы проходящими.

9. Плоскость проходящая чрезъ три точки поверхности сферы, сущїя въ равномъ разстоянїи отъ одного полюса большаго круга, будетъ паралельна плоскости сего круга сферы.

10. Кратчайшее разстоянїе между двухъ точекъ на поверхности шара есть дуга большаго круга между оныхъ точекъ включенная, такъ какъ прямая линѣя на плоскости.

11. Означенной на сферѣ окружности большаго круга полюсы, можно найти посредствомъ кривоножнаго циркуля (называемаго сферическимъ). Ибо развѣдя онаго концы на четверть окружности того круга поставь одинъ конецъ въ какой нибудь точкѣ той окружности, а другимъ концомъ въ обѣ стороны на сферѣ опиши дуги: равнымъ образомъ съ другой точки круга тѣмже разстоянїемъ циркуля должно начертить двѣ дуги, то сихъ дугъ пересѣчки съ первыми покажутъ того круга полюсы, то есть, двѣ противолежащїя точки, изъ коихъ каждая на 90 гр. въ разстоянїи отъ сего большаго круга (3).

12.

12. Напротивъ того для начертанія на сферѣ большаго круга изъ даннаго его полюса, надобно взять сферическимъ циркулемъ точно четверть окружности назначеннаго большаго круга на сферѣ, или инаго круга на плоскости написаннаго, котораго бы діаметръ былъ равенъ діаметру оной сферы, и поставя конецъ циркуля на заданномъ полюсѣ начерти на сферѣ кругъ, то оной будетъ искомой большой кругъ сферы. Такимже способомъ отъ данныхъ точекъ описываются на сферѣ всякія круги или дуги круговъ.

13. Сіе описаніе всякихъ круговъ и дугъ на сферѣ отъ ихъ полюсовъ, можно мысленно представлять чинимое простымъ циркулемъ, полагая одинъ его неподвижной конецъ на оси въ центрѣ описуемой дуги или круга.

14. Предл. I. Какіе нибудь два большія круга на сферѣ написанныя пересѣкаются между собою на двѣ равныя части.

Понеже сіи два круга имѣютъ одинъ центръ (6), и общее сѣченіе ихъ плоскостей есть (г. 336) прямая линѣя: но оной центръ долженъ быть въ ихъ сѣченіи, по сему прямая та линѣя есть общей діаметръ

метръ обоихъ круговъ, при томъ всякой кругъ отъ своего діаметра раздѣляется пополамъ; сего ради большія круга на сферѣ между собою пополамъ разсѣкаются.

15. Слѣдст. I. Всякія двѣ дуги большихъ круговъ, изъ которыхъ каждая меньше 180 гр. ни какой на сферѣ площади окружить не могутъ, но только смычкою однихъ своихъ концовъ составляютъ уголъ, а другими концами уже не смыкаются.

16. II. Два большія круга взаимно рассѣкающіяся дѣлаютъ два угла по обѣ стороны сѣченія равныя: и оныя круги рассѣкаются въ расстояніи 180 гр. то есть, въ противолежащихъ точкахъ сферы.

17. Сферическій уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ большихъ круговъ и размѣряется дугою большаго круга включенною между дугъ сего угла, и отстоящею въ 90 гр. отъ угольной точки.

18. Слѣдст. I. По сему дуга FE (ф. 2) большаго круга отъ верха B какого нибудь сферическаго угла EBF описанная, есть мѣра онаго угла. И во обще, какая нибудь дуга fe отъ верха B написанная и содержится между сторонъ BF, BE сферическаго угла FBE

 есть

есть мѣра сего угла. Ибо да будетъ AFBCA плоскость полкруга, и AEBCA плоскость другова, кои своимъ пересѣченіемъ составляютъ сферич. ∠ FBE, тогда явно (г. 337) 1 е. Что буде на обѣихъ плоскостяхъ изъ центра C къ діаметру AB проведутся прямостоящія радіусы CE, CF, то уголъ FCE равенъ наклоненію двухъ плоскостей, а дуга FE изъ цѣнтра C написанная есть мѣра сего наклоненія: но какъ (13) оная же дуга можетъ начертиться отъ полюса B, по сему точка B есть полюсъ дуги большаго круга размѣряющей сферическій уголъ FEC. 2 е. Ежели изъ иной какой либо точки c, взятой на сѣченіи AB, и ко оному на тѣхъ плоскостяхъ воставить два перпендикуляра ce, cf, то оныя будутъ въ плоскости перпендикулярной къ AB, слѣдственно и въ плоскости круга паралельнаго къ плоскости большаго круга, коего полюсъ B: притомъ AB есть общая ось обоихъ сихъ круговъ, то ∠ecf (и его мѣра дуга ef изъ центра c описанная) будетъ равенъ наклоненію плоскостей двухъ полукруговъ (г. 337). Но таже дуга ef описуется (13) изъ точки B, по сему какая нибудь дуга ef отъ верха B, сферическаго угла

написанная

написанная и между его сторонѣ EB, FB включенная есть мѣра сего угла.

19. II. Ежели продолжатся стороны какого либо сферическаго угла FBE (ф. 2), пока опять сомкнутся въ A, тогда ∠ FAE = ∠ FBE, и продолженныя дуги будутъ суплементы тѣхъ дугъ.. Ибо двѣ дуги вторично пересѣкаются токмо въ разстоянiи 180 гр. отъ чего дуги AFB, AEB будутъ по 180 гр. Но B есть полюсъ дуги FE размѣряющей уголъ FBE, а сiя дуга FE отстоитъ отъ точекъ B и A въ 90 гр. по сему точка A есть также полюсъ дуги FE, слѣдственно дуга FE равно размѣряетъ оба сферическiя углы FBE, FAE.

20. III. Точка круга отстоящая въ 90 гр. отъ его пресѣченiя съ другимъ кругомъ, есть мѣсто, гдѣ первой кругъ отъ другова тогда въ дальнѣйшемъ разстоянiи находится, и обратно.

21. IV. Отъ взаимнаго пресѣченiя двухъ большихъ круговъ или дугъ противолежащiя углы между собою равныя; потому что наклоненiе двухъ плоскостей есть тоже по обѣ стороны ихъ разсѣченiя.

22. V. Половина большаго круга на

другомъ или дуга на другой дугѣ стоящая составляетъ два угла, изъ коихъ одинъ всегда суплементъ другова. По сему всякой сферической уголъ есть меньше 180 гр.

23. II. разстояніе полюсовъ двухъ большихъ круговъ на сферѣ равно углу наклоненія сихъ круговъ.

Пусть AEB, CED (ф. 3) будутъ два большія круга сферы, коихъ плоскости проходятъ чрезъ его центръ F, и пусть a, b суть полюсы одного, и c, d полюсы другова круга. Тогда (3) дуга Aa = Cc = 90 гр. а дуга Ca у обѣихъ есть общая, кою отнявъ отъ равныхъ останется дуга AC размѣряющая наклоненіе CFA круговъ, равна дугѣ ca размѣряющей разстояніе полюсовъ.

24. Слѣдст. I. Прямаго сферическаго угла одна сторона проходитъ чрезъ полюсъ другой стороны или дуги угла, и обратно. Ибо буде ∠ bAE прямый (ф. 3), то дуга bE = 90 гр. коей точка E отстоитъ отъ дуги ADB въ 90 гр. по сему точка E есть ея полюсъ; также точка b есть полюсъ дуги AEB.

25. II. Всѣ большія круга или ихъ дуги чрезъ

чрезъ полюсы иной дуги проходящїя суть перпендикулярны къ оной дугѣ. По сему ежели потребно изъ данной точки на данную дугу опустить перпенд. то надобно чрезъ ту точку и полюсъ данной дуги провесть дугу большаго круга.

26 Ш. Два или многїя большїя круга либо ихъ дуги перпендикулярныя къ иной дугѣ, пересѣкаются всѣ въ ея полюсѣ или въ разстоянїи на 90 гр. отъ сея дуги; и обратно: дуга секущая двѣ или многїя другїя дуги въ разстоянїи на 90 гр. отъ ихъ пресѣченїя, всѣ оныя перпендикулярно разсѣкаетъ и переходитъ чрезъ ихъ полюсы.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
О проекцїи сферы
начальныя основанїи

27. Проекцїя сферы есть умственное представленїе сферы на плоскости со всѣми ея точками и кругами, такъ какъ они на прозрачной плоскости (на стеклѣ) чрезъ нѣкое отъ нея разстоянїе оку кажутся.

28. Сія плоскость, на которую сфера съ ея кругами и точками такъ переносится, имянуется плоскость проекціи.

Проекція сферы есть двоякая: ортографическая или прямоизображаэмая, стереографическая или косвеннопредставляемая.

29. Стереографическая проецкія сферы есть такое представленіе ея круговъ на плоскости круга чрезъ центръ сферы проходящаго (называемой плоскостью проекціи) какъ они кажутся оку смотрящему на сферу изъ одного полюса того большаго круга.

30. Мѣсто ока именуется точка представляющая или нижней полюсъ, а діаметрально противолежащая точка называется дальнѣйшая или верхней полюсъ.

31. Начальный или первый кругъ есть тотъ большой кругъ, которой проекцію или представленіе ограничиваетъ.

32. Прямый кругъ есть тотъ, которой представляется діаметромъ начальнаго круга, и есть видъ того большаго круга, коего плоскость чрезъ око проходитъ.

33. Косвенный кругъ есть проекція того большаго круга, коего плоскость противъ ока въ косвенномъ положеніи находится.

34. Проекцїя какой либо точки на сферѣ есть та точка на плоскости проекцїи, чрезъ кою отъ ока лучь зренїя проходитъ.

35. Линѣи отъ каждой точки окружности представляемаго круга къ оку, или къ представляющей точкѣ доходящїя, составляютъ выпуклую поверхность конуса.

36. Ортографическая проекцїя сферы есть переносное изображенїе оной съ ея кругами на плоскости перпендикулярными къ ней линѣями, такъ яко бы смотря на сферу изъ безконечнаго расстоянїя, и тогда лучи зрѣнїя между собою паралельныя.

37. По сей проекцїи палагается око на оси круга проекцїи въ пребезмѣрномъ отъ него разстоянїи, и чрезъ то всѣ перпендикулярныя къ плану проекцїи большїя и малыя полкруга переносятся на прямыя линѣи или на ихъ дїаметры, то есть, на хорды того круга; паралельныя же круга на равныя себѣ круга, а косвенныя или наклонныя къ плоскости проекцїи круга изображаются Еллипсисами и проч.

Но какъ сїя проекцїя не столь употребительна въ сферической наукѣ, того ради о первои, то есть, о стереографической особливо толковать будемъ.

О свойствахъ стереографической проекціи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. I.

38. Въ сей проекціи сферы, всѣ круга непроходящія чрезъ око представляются кругами.

Пусть ACFDB (ф. 4, 5 и 6) представляетъ сферу, пересѣченную плоскостью RS перпендикулярно діаметру EH, отъ мѣста ока E проведенною, и пусть сѣченіе сферы плоскостью RS будетъ кругъ CFDL, коего полюсы H и E.

Положимъ AGB есть представляемой кругъ на сферѣ, коего удаленный полюсъ отъ ока есть P, и лучи зренія отъ круга AGB простираючись въ E составляютъ конусъ AGBE, коего треугольникъ AEB есть сѣченіе проходящее чрезъ верхъ E и діаметръ основанія AB: тогда фигура agbf проекція круга BGA будетъ кругъ.

Доказ Понеже углу Eab есть мѣра $\frac{1}{2}$ дуги AC + ($\frac{1}{2}$ ED =) $\frac{1}{2}$ дуги CE (г. 94), а углу EBA мѣра $\frac{1}{2}$ дуги AC + $\frac{1}{2}$ дуги CE (г. 87): по сему $\angle EBA = \angle Eab$, и отъ того треугольники EAB, Eba имѣющія уголъ E общіи суть подобныя. Сего ради ab сѣчетъ стороны EA, EB конуса антипара-

лельно

лельно къ AB. Слѣдст. сѣченіе aſbg есть кругъ (г. 463).

Помыслимъ еще, что плоскость RS оборотится на линѣе CD, пока соединится съ плоскостью круга ACEB, тогда явно есть, что точка L падетъ въ H, точка F въ E, а кругъ CFDL соединится съ кругомъ CEDH, и здѣлается начальнымъ кругомъ, коего точка F или E будетъ мѣстомъ ока, по сему представленной кругъ aſbg учинится кругомъ aNbK.

39. Слѣдст. I. Ибо явно, что средина представленнаго діаметра есть центръ представл. круга большаго или малаго.

40. II. Центры и полюсы всѣхъ круговъ паралельныхъ къ плоскости проекціи ложатся на центръ проекціи.

41. III. Центры и полюсы круговъ наклонныхъ къ плоскости проекціи, приходятъ на діаметръ начальнаго круга прямостоящій къ діаметру проведенному чрезъ око или представляющую точку; но въ разныхъ разстояніяхъ отъ его центра.

42. IV. Всякой косвенной большой кругъ сѣчетъ начальнаго круга въ двухъ точкахъ діаметрально противолежащихъ.

ПРЕДЛ. II.

43. Представленной дїаметрЪ какого либо круга, содержимой вЪ углѢ при окѢ, равенЪ разстоянїю сего круга отЪ его ближайшаго полюса на сферѢ, и сей уголЪ прямою соединяющую око и тотЪ полюсЪ пополамЪ раздѢляется.

Пусть сфера HFEG (ф. 7) пересѢчена плоскостью RS, и ABC какой либо косвенной большой кругЪ, коего дїаметрЪ перенесенЪ вЪ ac, а KOL ему паралельной кругЪ, коего дїаметрЪ KL представленЪ вЪ kl.

Разстоянїи сихЪ круговЪ отЪ ихЪ полюса P суть дуги AHP, KHP, а углы aEc, kEl, суть углы при окѢ содержимыя ихЪ представленными дїаметрами ac, kl.

Тогда углу aEc есть мѢра дуга AHP, углу kEl мѢра дуга KHP, и сїи углы чрезЪ EP пополамЪ раздѢлены.

Доказ. Ибо дуга PHA = дугѢ PC, а дуга PHK = дугѢ PL (3). Но углу AEC мѢра есть $\frac{1}{2}$ дуги AFC = дугѢ PHA (г.87), также углу KEL есть мѢра $\frac{1}{2}$ дуги KPL = дугѢ PHK. По сему угловЪ AEC, KEL суть мѢры дуги PHA, PHK, и при томЪ явно, что оныя линѢею EP пополамЪ раздѢлены.

44. СлѢдст. I. Когда линѢя EP переноситЪ полюсЪ P вЪ p, тогда она же отсылаетЪ

ептъ представленной полюсъ къ точкѣ на сферѣ въ окружности начальнаго круга.

45. II. На начальномъ кругѣ можно назначать представленїе всякаго круга, коего даны разстоянїе отъ его полюса и перенѣсенная точка сего полюса. Ибо PA и PC перенеслись въ pa и pc, а раздѣленїе пополамъ линѣи ac дастъ центръ искомаго круга.

46. III. Всякой представленной косвенной большой кругъ сѣчетъ начальнаго круга подъ угломъ равнымъ наклоненїю того косвеннаго круга къ плоскости проекцїи. Ибо Fa равномѣрна съ наклоненїемъ FA, а Fa есть мѣра углу FHa, по сему FH, Ha каждая по 90 гр. (17).

47. IV. Разстоянїе между проекцїями большаго круга и нѣкоего ему паралельнаго равно ихъ разстоянїю на сферѣ. По сему проекцїя ak равномѣрна съ AK.

ПРЕДЛ. III.

48. Всякая точка сферы стереографически представленная, отстоитъ отъ центра проеецїи на тангенсъ полдуги включенной между сею точкою и полюсомъ оку противолежащимъ, положа за радїусъ полдїаметръ сферы.

Пусть

Пусть cЪЕВ (ф. 8) будетъ большой кругъ сферы, коего центръ c, и GH плоскость проекціи секущая діаметръ сферы въ Ъ, В. Е, С полюсы сѣченія сею плоскостью. a, есть проекція точки A: тогда ca равна есть тангенсу полдуги AC.

Доказ. Проведя CF тангенсъ дуги CD = $\frac{1}{2}$ дуги CA, соедини cF, тогда треугольники CFc, caE будутъ равныя, ибо Cc = cE, ∠C = ∠Eca = прямому, и ∠CcF = ∠cEa (г. 87), по сему ca = CF (г. 133). Слѣдственно ca равна тангенсу полдуги CA.

ПРЕДЛ. IV.

49. Уголъ состоящіи между окружностей двухъ круговъ на одной плоскости взаимно пересѣченныхъ равенъ есть углу между тангенсами тѣхъ круговъ у точки сѣченія; и еще равенъ углу между радіусами въ ту точку проведенными.

Пусть CE, CD (ф. 9) будутъ двѣ дуги круговъ на одной плоскости пересѣченныхъ въ точкѣ C. AC, BC ихъ радіусы. CG, FC тангенсы при точкѣ C. Тогда криволинѣйный ∠ECD = ∠GCF = ∠ACB.

Доказ. Радіусы AC, BC суть перпендикулярный къ тангенсамъ GC, EC (г. 81), также и къ дугамъ CE, CD. По сему для

одинакаго

одинакаго положенія тангенсовъ и дугъ при точкѣ C, ∠ECD = ∠GCF. Притомъ ∠ACB + ∠BCG = (прямому =) ∠FCG + ∠BCG, и тако по отнятіи отъ нихъ общаго угла BCG, будетъ ∠ACB = ∠FCG. Сего ради ∠ECD = ∠GCF = ∠ACB.

50. Примѣч. Ежели дуги CE, CD будутъ въ разныхъ плоскостяхъ, то таже истинна окажется въ рассужденіи ихъ тангенсовъ. Ибо положимъ что кругъ CD обращается на неподвижномъ радіусѣ BC, пересѣкаючи кругъ CE въ C, тогда тангенсъ CF движась съ нимъ имѣетъ тоже наклоненіе къ BC: и сколь наклоненіе плоскостей сихъ круговъ перемѣнится, то столь перемѣнится и наклоненіе тангенсовъ. По сему уголъ между тангенсами во всякомъ положеніи круглыхъ плоскостей, равенъ есть углу между ихъ окружностей.

51. Слѣдст. Ежели плоскость касаетъ сферу въ точкѣ взаимнаго пересѣченія двухъ круговъ, тогда тангенсы обоихъ круговъ лягутъ въ сей плоскости. По сему во всякомъ косвенномъ положеніи, прямая линѣя перпендикулярная одному тангенсу, пересѣкаетъ другой тангенсъ.

ПРЕДЛ.

ПРЕДЛ. V.

52. Уголъ между двухъ круговъ стереографически представленныхъ равенъ углу, какой тѣ круга на сферѣ дѣлаютъ.

Пусть IACE, ABL (ф. 10) суть два круга на сферѣ сѣкущіяся въ A. E мѣсто ока, и RS плоскость проекціи, на которую точка A перенесена въ a на линѣю IC діаметра круга ACE. Пусть DH, FA тангенсы круговъ ACE ABL. Тогда ежели ad, af суть проекціи тангенсовъ AF, AD, то перенесенной ∠ daf будетъ равенъ сферическому ∠ BAC.

Доказ. Ибо тангенсы AD, AF лѣжатъ косвенно на плоскости касающей сферу въ A (51). Отъ какой либо точки D тангенса AD воставя DF перпенд. къ AD сѣкущую тангенсъ AF въ F, проведи DG паралельно къ IC до продолженной черты EA въ G, по томъ соедини FG и FE сѣкущую плоскость проекціи въ f. Но какъ тангенсъ DH есть въ одной плоскости съ кругомъ ACE проходящимъ чрезъ око E, то линѣя AD перенесется въ линѣю ad.

А понеже ∠ DGE = ∠ daE (г. 48) = ∠ EAH (г. 86 и 94) а ∠ EAH = ∠ DAG (г. 40): сего ради ∠ DGE = ∠ DAG, и DG = DA (г. 125). Но DF перепендик. къ AD, также и къ плоскости

кости ACE, и по сему она вЪ паралельномЪ положенiи сЪ плоскостью RS. Того ради df проекцiя линѣи DF есть перпендикулярна кЪ da проекцiи линѣи DA.

И тако треугольники dfa, DFG суть паралелныя сѣченiи пирамиды DFGE, отЪ чего ad : df :: (DG =) DA : DF (г. 434). Сего ради треугольники ADF, adf имѣющiя поравному углу и стороны около сего угла пропорцiональныя, суть подобныя (г. 210). СлѣдсТ. ∠ daf = ∠ DAF. Но ∠ DAF = ∠ BAC (49), по сему ∠ daf = ∠ BAC.

ПРЕДЛ. VI.

53. Разстоянiе между полюсовЪ началнаго круга и косвеннаго вЪ сей проекцiи, равно тангенсу полнаклоненiя сихЪ круговЪ; а разстоянiе ихЪ центровЪ равно тангенсу того наклоненiя. Полагая полдiаметрЪ начальнаго круга за радiусЪ.

Пусть AC (ф. 11) будетЪ дiаметрЪ круга, коего полюсы P и Q и наклоненЪ кЪ плоскости проекцiи вЪ углѣ AIF. a, c, p, проекцiи точекЪ A, C, P. НаЕ представленной косвенной кругЪ, коего центрЪ q. Когда плоскость проекцiи здѣлается начальнымЪ кругомЪ коего полюсЪ I, тогда Ip = тангенсу полугла AIF или полдуги AF, а Iq = тангенсу дуги AF или угла FHa = AIF.

Доказ.

Доказ. Понеже $AH + HP = AH + AF$, и такъ $HP = AF$. Но $Ip =$ тангенсу половины дуги HP, или половины AF (48). Притомъ когда AC уже перенесена въ ac, то q, средина линѣи ac есть центръ перенесеннаго круга, которой представляется чрезъ HaE (45). Продолжи Eq до r, тогда $qa = qE$, и $\angle qEa = \angle qaE$ (г. 125).

Но $\angle qaE$ размѣряется полудугою EFA (г. 94), по сему дуга $AHr =$ дугѣ AFE (г. 74); но какъ дуга $AHP = FQE$, то $Pr = AF = HP$, и $HPr =$ двоиной дугѣ AF, и тако (г. 210) $\angle IEq = \angle AIF$ наклоненїю круговъ. Но Iq есть тангенсъ угла IEq при радиусѣ EI.

54. Слѣдст. Радїусъ косвеннаго круга равенъ есть секансу наклоненїя сего круга къ начальному, ибо Eq есть секансъ угла IEq, при радїусѣ EI.

ПРЕДЛ. VII.

55. Ежели чрезъ данную точку на начальномъ кругѣ напишется косвенны кругъ, тогда центры всѣхъ иныхъ косвенныхъ круговъ чрезъ сїю точку проходящихъ будутъ на прямой линѣе, проведенной чрезъ центръ перваго косвеннаго круга перпендикулярно къ линѣе чрезъ сей центръ, данную точку и центръ начальнаго круга проходящей.

Да

Да будетъ GACE (ф. 12) начальный кругъ, DEI большой кругъ описанной чрезъ D, коего центръ есть B. HK есть прямая черта проведенная чрезъ B, перпендикулярно къ прямой CI, прошедшей чрезъ D, B и центръ начальнаго круга. Тогда центры всѣхъ прочихъ большихъ круговъ FDG проходящихъ чрезъ D придутъ на линѣю HK.

Доказ. Понеже E есть представляющая точка, то кругъ EDAI будетъ проекцїя круга, коего дїаметръ есть NM (38). По сему D и I суть проекцїи точекъ N, M противолежащихъ на сферѣ, или кои на полукружность разстоятъ. Того ради всѣ круга проходящїя чрезъ D и I должны быть проекцїи большихъ круговъ на сферѣ. Но DI есть хорда въ каждомъ кругѣ проходящемъ чрезъ точки D, I. Слѣдственно центры всѣхъ сихъ круговъ придутъ на линѣю HK, перпендикулярно чрезъ B средину линѣи DI проведенную (г. 71).

ПРЕДЛ. VIII.

56. Равныя дуги какихъ либо двухъ большихъ круговъ, включаются между двухъ иныхъ круговъ проведенныхъ на сферѣ чрезъ дальнѣйшїя полюсы сихъ большихъ круговъ.

Пусть PBEA (ф. 13) будетъ сфера коей AGB, CFD, суть два большїя круга, E, P дальнѣйшїя ихъ полюсы, и чрезъ сїи полюсы проведенъ большой кругъ PBEC, и малой кругъ PGE, пресѣкающїя большихъ круговъ A GB, CFD въ точкахъ B, G и D, F: тогда включенныя дуги BG, DF между собою будутъ равныя.

Доказ. Ибо дуги ED + DB = PB + DB, по сему ED = PB, и дуги EF + FG = PG + FG (3), для того EF = PG Но точки F, G равно отстоятъ отъ ихъ полюсовъ P, E: при томъ ∠ DEF = BPG, ибо круги при точкахъ взаимнаго ихъ пресѣченїя дѣлаютъ равныя углы (16). По сему треугольники EFD, PGB суть равныя (ниже n. 96), и дуга BG = дугѣ DF.

ПРЕДЛ. IX.

57. Ежели отъ представленнаго полюса большаго круга проведутся линѣи, сѣкущїя окружность перенесеннаго круга и плоскости проекцїи, тогда включенныя дуги сихъ окружностей будутъ равныя.

Пусть на плоскость проэкцїи AGB (ф. 13) перенесенъ большой кругъ CFD въ cfd, а полюсъ его P въ p: тогда проведенныя линѣи pd, pf пресекутъ окружность плос-

кости

кости проэкціи въ B, G, а перенесеннаго круга въ d, f, и дуга GB = дугѣ fd.

Доказ. Понеже точки D, F перенесены въ d, f (38), то дуга fd равномѣрна съ дугою FD: но дуга FD равна есть дугѣ GB (55), по сему дуга GB = fd.

ПРЕДЛ. X.

58. радіусъ всякаго малаго круга, коего плоскость перпендикулярна есть плоскости начальнаго, равенъ тангенсу расстоянія сего малаго круга отъ его полюса: а секансъ сего расстоянія равенъ расстоянію центровъ начальнаго круга и малаго.

Пусть P (ф. 14) есть полюсъ, а AE діаметръ малаго круга, коего плоскость перпендикулярна плоскости начальнаго круга, коего центръ C: тогда d будетъ центръ представленнаго малаго круга, dA = тангенсу дуги PA, а dC = секансу дуги PA.

Доказ. Проведи діаметръ ED паралельно къ AB, а чрезъ P черту cb. Понеже E есть прожектующая точка, то діаметръ AB перенесется въ ab (34), и d средина линѣи ab есть центръ круга на ab (39). По сему прямая проведенная отъ D чрезъ A придетъ въ b (г. 89), проведи CA, dA. Потомъ въ прямоугольн. треугольникахъ DCb, DAE,

имѣющихъ общей уголъ D, будетъ $\angle$ DbC = $\angle$ DEA. Но $\angle$ DEA = $\frac{1}{2}$ $\angle$ DCA, а $\angle$ DbC = $\frac{1}{2}$ $\angle$ AdC, по сему $\angle$ DCA = AdC (г.88). Притомъ $\angle$ DCA + $\angle$ ACd = прямому углу, по сему и $\angle$ AdC + $\angle$ dCD = прямомуже углу, и тако $\angle$ CAd есть прямой (г. 114). Сего ради dA = радїусу круга AaB, есть тангенсъ дуги PA, при радїусѣ CA (г. 81), а черта dC, разстоянїе цѣнтровъ, есть секансъ дуги AB (тр. 5).

Слѣдствїе. Тангенсъ и секансъ какой нибудь дуги начальнаго круга, также принадлежитъ равной дугѣ какого ни есть косвеннаго круга, и оныя дуги считаются отъ ихъ взаимнаго пресѣченїя.

Ибо дуга Pc каждаго косвеннаго круга включенная между полюсомъ P и дугою малаго круга AaB, есть одного содержанїя съ дугою PA начальнаго круга, потому что дуга AaB есть въ равномъ разстоянїи отъ ея полюса P (3).

ПРЕДЛ. XI.

59. Ежели сфера касаетъ плоскость ag въ точкѣ D и проведется перпендикулярной дїаметръ DO, тогда око изъ O представитъ кругъ OADG (проходящей чрезъ око) на плоскости ag прямою линѣею (ф. 15).

Доказ. Понеже око есть въ плоскости

пере-

переноснаго круга, и лучи отъ ока до плоскости суть прямыя линѣи. Сего ради око изъ O увидитъ точку A на плоскости въ a, B въ b, n въ m и проч. въ общемъ сѣченiи прожектуемаго круга и плоскости ag. Слѣдст. точки оной окружности ADGO представляются на линѣе ag.

Примѣчанiе. Проекцiя круга OAG, измѣряется отъ D на линѣе полутангенсовъ. Ибо буде изъ центра O радiусомъ OD написать кругъ, тогда линѣя Dm будетъ тангенсъ угла DOm, то есть, полутангенсъ угла DCn или дуги Dn.

ПРЕДЛ. XII.

60. Всякой кругъ (то есть большой или малой) чрезъ око не преходящей представляется кругомъ на плоскости сферу касательной.

Доказ. Пусть AB (ф.16) будетъ дiаметръ круга представляемаго на плоскость ag, лучи простираясь отъ O по окружности сего круга дѣлаютъ конусъ, коего треугольникъ проходящей чрезъ ось есть AOB. Око изъ O видитъ A на плоскости ag въ d, и B въ b, по сему db есть перенесенный дiаметръ. Положимъ что продолженъ конусъ

ниже ag, до дїаметра основанїя MN паралельнаго къ AB, по томъ проведи AHQ паралельно къ ag: тогда дуга OA = OQ (г. 69 и 76) а ∠ OAQ = OBA (г. 90), по сему (г. 48) ∠ Odb = OAQ = OBA = ONM.

Слѣдственно, конусъ, коего дїаметръ основанїя есть MN, пересѣченъ антипаралельно плоскостью чрезъ db проведенную: по сему такое сѣченїе есть кругъ (г. 463).

ЧАСТЬ ТРЕТЇЯ.

О сферической геометрїи.

61. Сферическая геометрїя, или сферическая проекцїя есть наука, какъ описывать или представлять на плоскости большаго круга такїя круга или ихъ дуги, какїя обыкновенно на сферѣ проводятся, и о измѣренїи въ проекцїи оныхъ дугъ и угловъ.

ПРОБЛЕМА I.

62. Чрезъ двѣ данныя точки въ начальномъ кругѣ или на плоскости проекцїи большой кругъ начертить.

Да будутъ данныя точки A, B, и C

есть

есть центрЪ начальнаго круга.

Случай 1. Когда одна точка A есть центрЪ начальнаго круга (ф. 17).

РЪш. ДїаметрЪ чрезЪ данныя точки A, B проведенный, будетЪ требуемой большой кругЪ (32).

Случ. 2. буде одна точка A есть на окруженїи начальнаго круга (ф. 18).

РЪш. ЧрезЪ A проведи дїаметрЪ AD, тогда косвенной кругЪ чрезЪ три точки A, B, D проведенный (г. 100) будетЪ желаемой большой кругЪ (42).

63. Случ. 3. буде ни которая точка не вЪ центрЪ, ни на окруженїи начальнаго круга (ф. 19).

РЪш. ЧрезЪ одну точку A, и центрЪ C проведи AG и CE перпендикулярно кЪ AG. ЛинЪйка чрезЪ E и A дастЪ точку D, чрезЪ D и C точку F, а чрезЪ E и F укажетЪ точку G на продолженной AC. ЧрезЪ три точки G, B, A начерти окружность сЪкущую начальнаго круга вЪ H и I, тогда косвенной кругЪ HBAI будетЪ искомой большой кругЪ: ибо AG учинилась прокцїею большаго круга FD (34). По сему A и G суть проекцїи противолежащихЪ точекЪ на сферЪ (16), чрезЪ кои всЪ круга проходящїя будутЪ виды большихЪ круговЪ на сферЪ.

ПРОБЛЕМА II.

64. около нѣкоей данной точки яко полюса, на начальномъ кругѣ большой кругъ написать.

Пусть P будетъ данная точка, а I центръ начальнаго круга.

Случ. 1. когда данной полюсъ P въ центрѣ начальнаго круга (ф. 20).

Рѣш. Начальной кругъ будетъ искомой большой кругъ (31).

Случ. 2. буде данной полюсъ P въ окружности начальнаго круга (ф. 21).

Рѣш. Чрезъ данной полюсъ P проведи PE дїаметръ начальнаго круга: тогда другой дїаметръ AB перпендикулярно къ PE проведенный, будетъ желаемой большой кругъ (2 и 32).

65. Случ. 3. когда же данная точка P ни въ центрѣ ни въ окружности перваго круга (ф. 22).

Рѣш. Чрезъ P проведи дїаметръ bd, и къ оному перпендикулярно другой BE, тогда линѣйка чрезъ E и P покажетъ p. Послѣ сего положи дугу pA = 90, то линѣйка чрезъ E и A дастъ a на дїаметрѣ bd. Учиня дугу pD = pB, выведи D на продолженїе db въ C, потомъ изъ C радїусомъ Ca начерти BaE. Но какъ E есть точка изображающая и P перенесенной полюсъ: того ради p

есть

есть полюсъ круга представляемаго AF (44), и BaE есть проекція круга AE (38), угла CaF размѣряетъ полдуги AdE (г. 94). Но дуга ABD = дугѣ AdE: ибо Ap = (Bd =) dE, и pD = Ad по сочин. и тако ∠ AEC = ∠ CaE, и CE = Ca (г. 124). Слѣдственно C есть искомой центръ.

ПРОБЛЕМА III.

66. Даннаго перенесеннаго круга полюсы сыскать

1 е. Ежели данный кругъ AEB есть начальный (ф. 23).

Рѣш. Найди центръ C, (г. 101), и оной есть искомый полюсъ.

2 е. Когда данной кругъ ACB есть прямой кругъ (ф. 24).

Рѣш. Проведи діаметръ ED перпендикулярно къ AB, то концы или точки D, E, сего діаметра суть искомыя полюсы.

67. 3 е. Буде данной кругъ ABE есть косвенной (ф. 25).

Рѣш. Чрезъ пресѣченіи начальнаго и косвеннаго круговъ проведи діаметръ AE, а другой къ нему перпендикулярно, сѣкущей данной косвенной кругъ въ B. Изъ E выведя точку B въ b учини bp, bq, каждую = хордѣ 90. Изъ E выведи точку p

на дїаметрѣ чрезъ В проведенный въ Р, коя есть искомой полюсъ. Изъ Е выведи точку q на продолженную СВ въ точку Q, коя будетъ другой или противолежащей или внѣшней полюсъ. Наконецъ положи pD = pA, тогда изъ Е выведенная точка D на продолженную ВС въ F будетъ центръ косвеннаго круга АВЕ. Доводъ сего дѣйствїя явновиденъ есть отъ проблемы II.

ПРОБЛЕМА IV.

68. Какую нибудь дугу перенесеннаго большаго круга измѣрить; или на данномъ перенесенномъ большомъ кругѣ отмѣтить дугу по данному числу градусовъ.

Общее рѣшенїе. Сперва найди полюсъ даннаго круга (66), изъ коего проведи линѣи чрезъ концы данной дуги секущїя начальной кругъ, тогда содержимая ими дуга начальнаго круга, положенная на хордовой мастабъ дастъ искомую мѣру.

По сему, ежели АВ (ф. 26, 27, 28) есть измѣряемая дуга, и Р полюсъ даннаго круга DAF, то линѣи проведенныя чрезъ А и В дадутъ начальнаго круга дугу ab соотвѣтствующую дугѣ АВ прожектованнаго круга.

По томъ ежели потребно дугу даннаго

числа

числа градусовъ положить отъ данной точки А на прожектованномъ кругѣ DAF, тогда изъ полюса Р чрезъ А проведя прямую Ра положи данное число градусовъ отъ а до b. Проведя Рb, дуга АВ будетъ содержать данное число градусовъ.

69 Всякое число градусовъ удобнѣе полагается на прямомъ кругѣ чрезъ полутангенсы. Когда разстоянїе точки А (ф. 27) отъ центра С знаемо, и данная величина дуги полагаемая отъ А къ F, то къ вѣдомому разстоянїю СА приложи данную дугу АВ, по томъ сумму сихъ градусовъ взявъ съ мастаба полутангенсовъ положи отъ С до В, такъ здѣлается дуга АВ равна данному числу градусовъ.

Но буде дугу АВ надобно положить отъ А къ D, тогда разность между дугъ АВ и АС взятая съ мастаба полутангенсовъ, и положенная отъ С до В покажетъ дугу АВ равную данному числу градусовъ.

Доводъ всѣхъ оныхъ дѣйствїй явенъ есть отъ n. 57.

Примѣч. Полутангенсы суть самыя тангенсы половинъ дугъ мастаба тангенсовъ коихъ сочиненїе зависитъ отъ n. 48.

ПРОБ-

ПРОБЛЕМА V.

70. Какой либо сферической уголъ смѣритъ.

Общее рѣшенiе. Найди сперва полюсы двухъ круговъ уголъ составляющихъ, и отъ угольной точки чрезъ сiи полюсы проведи линѣи сѣкущiя начальной кругъ, тогда мѣра сему углу ежели острой, будетъ включенная дуга перваго круга, а суплементъ сея дуги будетъ мѣра тупаго угла.

Пусть предложенной уголъ есть DAB, составленной отъ большихъ круговъ AD, AB, коего полюсы суть C и P и линѣи проведенныя чрезъ угольную точку A и полюсы C и P сѣкутъ начал. кругъ въ E и p.

1е. буде уголъ состоитъ между первымъ и косвеннымъ кругомъ (ф. 29), тогда дуга pE есть мѣра острому углу DAB: но тупаго угла BAF мѣра суплементъ дуги pE.

2е. Когда уголъ между прямымъ и косвеннымъ кругами находится при окружности начальнаго, тогда дуга pE будетъ мѣра углу DAB (ф. 30).

3е. Ежели прямой и косвенной круги составляютъ уголъ внутри начальнаго круга, то дуга pE есть мѣра острому углу DAB, а суплементъ ея есть мѣра тупому углу DAF (ф. 31).

4е.

4 е. Буде уголъ учиненъ отъ пресѣченія двухъ косвенныхъ круговъ внутри начальнаго, тогда острому углу DAB есть мѣра дуга pE, а тупому углу DAF мѣра ея суплементъ (ф. 32).

Понеже угловая точка A есть въ обоихъ кругахъ, и въ разстояніи на 90 гр. отъ ихъ полюсовъ C и P (3, 4). По сему большой кругъ изъ точки A, яко полюса описанный перейдетъ чрезъ полюсы C, P, и линѣи отъ A чрезъ C и P проведенныя означатъ на окружности плоскости проекціи дугу равную разстоянію полюсовъ C и P (57): но разстояніе полюсовъ C, P равно наклоненію плоскостей круговъ AD, AB (23), то есть мѣра углу DAB.

ПРОБЛЕМА VI.

71. Чрезъ данную точку на нѣкоемъ перенесенномъ кругѣ, къ иному данному перпендикулярно большой кругъ провесть.

Общее рѣшеніе. Найди полюсъ даннаго круга, тогда большой кругъ проведенной чрезъ данную точку и сеи полюсъ будетъ прямостоящіи къ данному кругу.

Пусть данной перенесенной большой кругъ есть BAD, и данная точка A. 1 е.

1 е. Буде BAD (ф. 33) есть начальный кругъ, коего полюсъ есть P, тогда діаметръ чрезъ A проведенный будетъ перпендикуляръ къ BAD (25).

2 е. Когда BAD есть прямой кругъ, коего полюсы суть P и C: тогда косвенный кругъ чрезъ точки C, A, P написанный (г. 100) будетъ перпендикуляръ къ BAD (ф 34).

3 е. Ежели BAD есть косвенный кругъ коего полюсъ P: то чрезъ точки P и A проведенный (63) большой кругъ PAC, будетъ перпендикуляръ къ BAD (ф. 35).

Доводъ сихъ дѣйствій явенъ есть отъ н. 25.

ПРОБЛЕМА VII.

72. Чрезъ данную точку на данномъ перенес. большемъ кругѣ написать иной большой кругъ, которой бы съ первымъ данной величины уголъ составлялъ.

Пусть P будетъ данная точка на нѣкоемъ большемъ кругѣ APB.

1 е. Буде APB есть начальный (ф. 36) кругъ, тогда чрезъ данную точку P означь діаметръ PE и къ нему перпендикулярной AB. Проведи PD сѣкущую AB въ D такъ, чтобы уголъ CPD равенъ былъ данному. Изъ D радіусомъ DP напиши большой кругъ PFE, тогда уголъ APF будетъ даннаго числа градусовъ.

Ибо

Ибо ∠FPA = ∠ учиненному радїусами PC, PD (49), и D будучи въ равномъ расстоянїи отъ P и E, есть искомой центръ.

73. Иначе, положи CD равную тангенсу даннаго угла при радїусѣ CP, или здѣлай PD = секансу сего угла.

74. 2 е. Ежели APB есть прямой кругъ (ф. 37).

Проведя дїаметръ GH перпендикулярно къ APB, вынеси P на первыи кругъ въ a. Положа Hb = 2 Aa, выведи чрезъ G точку b на AB въ C. Вставя CD перпендик. къ AB, проведи PD сѣкущую CD въ D такъ чтобъ ∠CPD = дополн. дан. градусовъ (г. 42 или тр. 51). Изъ D радїусомъ DP начерти кругъ FPE, которой будетъ большой кругъ сочиняющїй съ кругомъ APB желаемой ∠APF.

Ибо C есть центръ большаго круга GPH (67), и центры всѣхъ большихъ круговъ проходящихъ чрезъ P будутъ на CD (55). Но ∠DPE = 90 (25), по сему ∠APF = ∠BPF (16) = дополненїю CPD есть искомой уголъ.

75. 3 е. Ежели APB (ф. 38) есть косвенный кругъ. Отъ точки данной P чрезъ центры начальнаго и даннаго круговъ проведи линѣи

PG,

PG, PC. Изъ C центра круга APB, на PG воставя перпендик. CD, проведи PD дѣлающую ∠ CPD = данному и сѣкущую CD въ D. Отъ D радïусомъ DP описанной кругъ FPE будетъ большой кругъ сѣкущей круга APB данномъ углѣ.

Ибо по сочинѣнïю центръ C круга APD есть на линѣе перпендик. къ PG проведенной чрезъ P и цѣнтръ начальнаго круга, и центры всѣхъ большихъ круговъ чрезъ P прошедшихъ будутъ (55) на CD. Но ∠ CPD между радïусовъ PC, PD содержитъ данное число градусовъ, того ради ∠ APF равенъ есть предложенному углу (49).

ПРОБЛЕМА VIII.

76. Около даннаго перенес. полюса по данному отъ него разстоянïю кругъ начертить. Или данному большему кругу по заданному разстоянïю паралельной кругъ написать (ф. 39, 40, 41).

Пусть P будетъ данной полюсъ принадлежащïй данному кругу DFE.

Общее рѣш. Чрезъ данной полюсъ P и центръ C начальнаго круга проведи дïаметръ, и DE къ нему перпендикулярной. Чрезъ E выведя точку P на начальной кругъ въ p, положи pA = pB = данному разстоянïю отъ полюса.

Изъ

Изъ E вынеси точки A и B на діаметръ CP въ a и b. Раздѣли ab пополамъ въ c, и отъ c, яко изъ центра, начерти кругъ чрезъ a и b, и оной будетъ искомой кругъ.

Но чтобъ паралельной кругъ былъ въ данномъ разстояніи отъ заданнаго большаго круга DFE, то найди какъ выше точку p, и положи pA = pB = дополненію даннаго разстоянія; а остатокъ дѣла соверши такъ какъ выше показано.

Ибо p есть полюсъ, коего проекція есть P (44). Но p есть полюсъ круга коего діаметръ AB перенесенъ въ ab (34). По сему c, средина черты ab есть центръ перенесеннаго круга (39).

Примѣч. Первой случай скорѣе здѣлатся можетъ по начертанію малаго круга около центра начальнаго круга тангенсомъ полразстоянія его отъ полюса P.

77. Второй случай удобнѣе учинится по сему: изъ точекъ A, B (какъ выше найденныхъ) тангенсомъ ихъ разстоянія отъ P полюса прямаго круга, опиши дуги сѣкущіяся въ c, что будетъ центръ малаго круга паралельнаго прямому DFE; ибо Ap есть тангенсъ дуги AP (58).

ПРОБЛЕМА IX.

78. Даны начальной кругѣ и проекція малаго круга сыскать полюсѣ онаго кружка.

Пусть C будетъ центръ начальнаго круга, и AED перенесенной кружокъ, коего центръ c и радіусъ CB (ф 42, 43, 44).

Общее рѣш. Чрезъ c центръ кружка и C центръ начальнаго, проведи діаметръ CF, а другой къ нему перпендикулярной CE. Найди перенесен. діаметръ Bb = 2 cB. Линѣи проведенныя отъ E чрезъ B и b пересѣкутъ начальной кругѣ въ a и d, и дуга ad раздѣлится пополамъ въ p. Линѣя чрезъ E и p пересѣчетъ діаметръ Bb въ точкѣ P, коя есть искомой полюсъ.

Истинна сего рѣшенія явновидна есть отъ пробл. VIII.

ПРОБЛЕМА X.

79. Чрезъ данную точку на плоскости проекціи или началнаго круга начертить болшой кругъ, которой бы съ инымъ опредѣленнымъ кругомъ здѣлалъ уголѣ данной величины: токмо чтобъ мѣра сего угла не меньше была разстоянія между данной точки и круга (ф. 45, 46, 47, 48, 49).

Пусть данная точка будетъ A, чрезъ которую надобно начертить кругъ сѣкущей большаго круга BDC, коего полюсъ P, подъ

угломъ

угломъ = данному числу градусовъ.

Генерал. рѣш. Около данной точки А, яко полюса начерти (64) большой кругъ EGF. Изъ P полюса даннаго круга BDC въ разстоянiи равномъ данному углу напиши (76) кружокъ сѣкущей большаго круга EGF въ G. Изъ точки G яко полюса начерти большой кругъ сѣкущей даннаго круга BDC въ D: тогда ADC будетъ желаемой уголъ.

Примѣч. Когда данной уголъ равенъ разстоянiю между данной точки и круга, тогда задача опредѣленная. Ежели мѣра угла больше онаго разстоянiя, то сiя задача имѣетъ два рѣшенiя, по начертанiю круга сѣкущаго данной въ двухъ точкахъ: но буде мѣра углу меньше разстоянiя, та задача невозможная.

Доводъ сего сочиненiя есть слѣдующей.

Ибо P и G суть полюсы дугъ BC и AD, и разстоянiе отъ P до G равно числу градусовъ даннаго угла, по сочиненiю. Но ∠ ADC = разстоянiю между P и G (23), того ради ∠ ADC есть искомый уголъ.

80. Ежели потребно провесть кругъ которой бы учинилъ данной уголъ съ начальнымъ.

Тогда изъ центра начальнаго круга

тангенсомъ заданнаго угла начерти дугу, а изъ данной точки A секансомъ даннаго угла пресѣки первую дугу: отъ сего пресѣченія проведенный кругъ чрезъ данную точку A припишетъ къ начальному кругу данной уголъ. Сїе зависитъ отъ N. 73.

ПРОБЛЕМА XI.

81. данъ большой кругъ сѣкущей начальнаго, начертить другой большой кругъ, которой бы съ даннымъ учинилъ заданной уголъ и дугу знаемой величины между начальнымъ и даннымъ кругомъ включенную.

Пусть, ABC будетъ начальной кругъ коего центръ есть P и данной большой кругъ ADC, коего центръ E (ф. 50, 51).

рѣш. Къ ADC проведя прямостоящей дїаметръ EBD, здѣлай ∠ 1 DF = дополненїю даннаго угла, положа = дополненїю 35 ти гр. (г. 42).

Положи DF = тангенсу данной дуги (58), а изъ P секансомъ сея начерти дугу Gg. Потомъ буде ADC косвенный кругъ, то изъ E центра круга ADC радїусомъ EF пересѣки дугу Gg въ G.

Но когда ADC есть прямой кругъ, то чрезъ F проведи FG паралельно къ ADC

сѣкущую

сѣкущую дугу Gb въ G: ибо центръ E дуги ADC есть въ дальномъ разстоянiи. И b G тангенсомъ DF, начерти дугу по секущую ADC въ I, проведи GI.

Чрезъ G и центръ P проведя GK рассѣкающую начальнаго круга въ H, K, здѣлай PL перпендикуляръ къ GK, а IL, перпенд. къ G сѣкущей PL въ L. Точка L будетъ центръ круга проходящаго чрезъ H, I, K, и оной есть искомой большой кругъ.

Ибо по заданiю ∠ AIH = 35 гр. а дуга IH = 58 гр. но GP есть секансъ, а GI есть тангенсъ дуги HI (58), и для равныхъ треугольниковъ EGI, EFD; ∠ EIG = ∠ EDF (г. 132): но ∠ EIG отъ тангенса дуги HI и радiуса дуги AI учиненны есть дополненiе угла между сихъ дугъ (49). Слѣдст. ∠ AIH есть дополненiе угла EDF.

ПРОБЛЕМА XII.

82 данъ большой кругъ на плоскости проекцiи, начертить другой большой кругъ которойбы съ тѣмъ и съ начальнымъ кругомъ учинилъ данныя углы.

Пусть данной большой кругъ будетъ ADC, полюсъ его Q (ф. 52, 53).

Рѣш. Изъ P полюса начал. круга начерти дугу mn, тѣмъ разстоянiемъ, кое

равно углу приписуемому къ начальному кругу, напримѣръ 62 гр. (76).

Изъ Q полюса другаго даннаго круга разстоянїемъ, кое равно углу приписуемому къ тому данному кругу ADC, на примѣръ 48 гр. начерти дугу on сѣкущую mn въ n (77).

Около n яко полюса напиши большой кругъ EDF сѣкущей даннаго круга въ E и D (64), тогда будетъ ∠ AED = 62 гр. а ∠ ADE = 48 гр. Ибо разстоянїе полюсовъ какихъ либо двухъ большихъ круговъ, равно есть углу сими кругами составленному (23).

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

О сферической тригонометрїи

* *

первыя основанїи.

83. Сферическая тригонометрїя есть наука, коя учитъ вычислять стороны и углы всякаго треугольника, отъ взаимнаго пресѣченїя трехъ большихъ круговъ на сферѣ изображеннаго.

Малыя

Малыя круги сферы не входятъ въ оное вычисленіе, потому что они суть разной величины или не одинакаго радіуса съ большими кругами; притомъ же ихъ плоскости проходятъ чрезъ разныя точки сферы, не такъ какъ большихъ круговъ (6 и г. 375).

84. Треугольникъ сферической состоитъ изъ трехъ сторонъ и трехъ угловъ каковъ есть ABC (ф. 54), и можно его представлять пирамидою ABCD, коей верхъ D въ центрѣ сферы, а стороны CDB, CDA, ADB суть секторы CDB, CDA, ADB отъ дугъ BC, AC, AB и радіусовъ CD, AD, BD опредѣленныя. При томъ явно есть, что каждой уголъ сферическаго треугольника равенъ углу наклоненія его сторонъ, а каждая сторона равна или мѣра углу при центрѣ D радіусами содержимому.

85. Величины не извѣстныхъ сторонъ и угловъ сферическихъ треугольниковъ находятся по сравненію синусовъ и тангенсовъ знаемыхъ сторонъ и угловъ съ синусами либо тангенсами искомыхъ.

86. Прямоугольный сферическій треугольникъ имѣетъ одинъ прямой уголъ; по сему сторона противолежащая прямому углу называется ипотенузою, а стороны содержащія прямой уголъ боками.

87. Квадрантальный или четвертный сферической треугольникъ имѣетъ одну только сторону въ 90 гр.

88. Косвенной сферической треугольникъ называется тотъ, у котораго всѣ углы косвенныя или наклонныя. Круглыя части треугольника суть дуги, кои его стороны и углы размѣряютъ.

89. Два какїя либо сферическїя треугольника называются между собою суплементы, буде стороны и углы одного треуголн. прямо суть суплементы другова; и по сему одинъ въ разсужденїи другова дополнительнымъ треугольникомъ имянуется.

* *

О главныхъ свойствахъ сферическихъ треугольниковъ.

90. I. Ежели изъ трехъ угловъ сферическаго треугольника, яко полюсовъ, A, B, C (ф. 55) разстоянїемъ 90 гр написать три дуги FE, FD, DE составляющїя иной треугольникъ DEF, то каждой бокъ сего треугольника есть суплементъ угла при полюсѣ онаго бока, и каждый уголъ есть суплементъ бока ему противолежащаго въ предложенномъ треугольникѣ ABC.

Доказ. Понеже A есть полюсъ дуги FE, а C полюсъ дуги DE, то и разстоя-

нїи

нїи точекъ A, E и C, E по 90 гр. по сему точка E есть полюсъ дуги NG. Также докажется что F есть полюсъ дуги IH, а D есть полюсъ дуги MBCL.

По томъ 1е. Ибо дуги FI и DL по 90 гр. (3), сего ради DL + FI = 180 гр. или DL + FL + LI = 180 гр. или DF + LI = 180 гр. Посему (г. 39) DF есть суплементъ дуги LI общей у четвертей DL, FI. Но сїя дуга LI имѣя полюсъ B есть мѣра углу ABC, для того бокъ DF есть суплементъ угла ABC. Такойже доводъ и на сїе, что GH мѣра углу A, есть суплементъ дуги FE и NM мѣра углу C есть суплементъ дуги DE.

2е. Когда дуги BL, AH суть по 90 гр. то ихъ общая часть AB есть суплементъ цѣлой дуги IH, размѣряющей ∠ IFH: по сему бокъ AB есть суплементъ угла F. Также AC суплементъ угла E, а BC суплементъ угла D.

91. II. Сумма какихъ нибудь двухъ сторонъ треугольника есть больше третьей.

Доказ. Ибо дуга большаго круга между двухъ точекъ на сферѣ содержимая есть кратчайшей путь отъ одной точки къ другой смѣкая по поверхности сферы: по

сему ежели итти отъ одной точки до другой подъ угломъ, то есть, буде описать двѣ стороны треугольника, тогда сей путь не будетъ кратчайшимъ (10).

92. III. Всякой бокъ сферическаго треугольника всегда меньше полукруга или 180 ти гр.

Доказ. Сферическiи треугольникъ всегда составляется отъ двухъ дугъ круговъ взаимно пересѣченныхъ, кои прежде своего сомкнутiя пересѣкаются третьею дугою; но дуги вторично смыкаются въ разстоянiи 180 гр. (15), по сему ни какая изъ тѣхъ сторона не можетъ быть въ 180 гр.

93. IV. Сумма трехъ сторонъ сферическаго треугольника всегда меньше 360 ти гр.

Доказ. Пусть треугольника ABC (ф. 56) продолжены двѣ стороны AB, AC пока сойдутся въ D, тогда дуги ACD, ABD будутъ по 180 гр. Но DC + DB есть больше BC, и ежели приложить къ нимъ AC + AB, то AC + AB + DC + DB есть больше BC + AC + AB, то есть два полкруга ACD, ABD вмѣстѣ больше суммы трехъ сторонъ AB, AC, BC.

94. V. Сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника есть всѣгда больше 180 гр. а меньше 540 гр. или шести прямыхъ угловъ.

Доказ. 1е. Сумма трехъ угловъ треугольника

угольника ABC (ф. 55) и трехъ сторонъ треугольника DEF, дѣлаютъ трижды 180 гр. или 540 гр. (90): но сумма трехъ сторонъ треугольника DEF есть меньше 360 гр. (91). По сему сумма трехъ угловъ треугольника ABC, есть всѣгда больше 180 гр.

2е. Понеже всякїй сферическїй уголъ меньше 180 гр. (22): по сему сумма трехъ какихъ ни есть сферическихъ угловъ всегда меньше нежели трижды 180 гр.

95. Слѣдст. Сферическїй треугольникъ можетъ имѣть три прямые углы и три тупые. По заданнымъ двумъ угламъ сферическаго треугольника непосредственно третьяго опредѣлить не можно.

Примѣч. Чѣмъ больше стороны сферическаго треугольника имѣютъ градусовъ или длиннѣе, тѣмъ сумма его угловъ превышаетъ 180 гр. Ибо тогда сферическїй треугольникъ тѣмъ паче разнится отъ прямолинѣйнаго треугольника.

96. VI. Два сферическїя треугольника равныя 1е. когда у нихъ всѣ сходственныя стороны между собою равныя. 2е. Ежели имѣютъ по двѣ равныя сходственныя стороны содержащїя равныя углы. 3е. буде у нихъ два сходственныя углы прилежащїя равной сторонѣ равныя. 4е. Ежели всѣ три угла одного

одного треугольника равны порознь всѣмъ сходственнымъ угламъ другова треугольника.

Доказательство трехъ первыхъ случаевъ совсемъ тоже, какое для прямолинѣйныхъ треугольниковъ (г. 132 и пр.); а доводъ четвертаго явенъ отъ сего; ибо такихъ треугольниковъ суплементы суть равныя треугольники (90), и оныхъ углы равныя (г. 132), по тому и самыя треугольники между собою суть равныя.

97. VII. Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (ф. 57) два угла B, C супротивныя равнымъ сторонамъ AC, AB суть равныя: и буде въ треугольникѣ два угла B, C равныя то и противныя имъ стороны AC, AB равныя.

Доказ. 1 е. Отмѣтя на дугахъ AB, AC равныя дуги AE, AD и проведя дуги BD, CE, явно есть (96), что треугольники ABD, AEC равныя имѣющія равныя стороны AE, AD и AB, AC содержащія общей уголъ A: по сему BD = EC. И тако треугольники EBC, BDC имѣющія двѣ сходственныя стороны равныя, то есть, BD = EC, EB = DC, и общей бокъ BC между собою равныя, по сему ∠ B = ∠ C.

2 е. Говорю ежели ∠ B = ∠ C, то бокъ AC = AB. Ибо положа CD = BE и проведя BD, CE, треугольники BDC, BCE суть ра-

равныя (96), потому что у каждаго по равному углу содержимому общею стороною BC и равными сторонами BE, CD: тогда 1 е. BD = EC, 2 е. ∠ DBC = ECB, отъ чего ∠ DEA = ECA. 3 е. ∠ BDC = BEC, а по сему ихъ суплементы BDA = CEA, и тако треугольники BDA, CEA суть равныя: понеже кромѣ общаго угла A имѣютъ равныя углы содержащія равныя стороны BD, CE, и для того AD = AE, AD + DC = AE + EB, и AC = AB.

98. Слѣ. ст. I. треугольникъ имѣющей три угла равныя, есть равнобочный и обратно.

99. II. Перпендикуляръ изъ верха равнобедреннаго или равнобочнаго треугольника на основаніе опущенны раздѣляетъ оное на двѣ части равныя.

100. VIII. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC (ф. 58) пребольшій бокъ BC противолежитъ пребольшему углу A, а малѣишіи бокъ AB противъ малѣйшаго угла C.

Доказ. учиня ∠ BAD = ABD, тогда (97) AD = BD и бокъ BC = AD + DC. Но (91) AD + DC есть больше нежели AC. По сему бокъ BC супротивной большему углу A есть больше бока AC противнаго меньшему углу B и проч.

101. XI. сферическаго треугольника ABC ежели сумма сторонъ AC, BC есть равна, больше, или мѣньше 180 град. тогда внѣшней уголъ CBD также есть равенъ, меньше или больше противолежащаго внутренняго угла A (ф. 56),

Доказ. Продолжа AC, AB до D, тогда дуга ACD = 180 град. (19). Ежели 1 е. AC + CB = 180 град. то BC = CD и ∠ CDB = CBD (97): но ∠ D = A (21) по сему и ∠ CBD = A.

2 е. Когда AC + CB больше 180 гр. или дуги ACD, тогда CD есть меньше дуги CB, и ∠ CBD меньше угла D или A (100).

3 е. Естьли AC + CB меньше 180 гр. или дуги ACD, тогда CD больше дуги CB, и уголъ CBD больше угла D или A.

* *

О сравненіи великости между сторонами и углами прямоугольныхъ треугольниковъ.

102. I. Каждой изъ наклонныхъ угловъ прямоугольнаго треугольника есть одного виду съ противною ему стороною, то есть, оной уголъ будетъ меньше 90 гр. ежели противной бокъ меньше 90 гр. а когда оной уголъ больше 90 гр. то противной ему бокъ больше 90 гр.

Доказ. Въ прямоугольномъ △ ABC (ф. 59)

буде

буде AB меньше 90 гр. то ∠ACB есть острый. Продолжи AB чтобъ AD = 90 гр. тогда точка D есть полюсъ дуги AC, а соединя DC уголъ ACD будетъ прямой, по сему ∠ACB есть острый. Также явно, ежели AB = 90 гр. то противной уголъ ACB есть прямой. Когда же въ △ кѣ ACD сторона AD больше 90 гр. то положа AB = 90 гр. и соединя CB будетъ ∠ACB прямой, а уголъ ACD тупой.

103. II. Ежели два бока прямоугольнаго треугольника одного виду, тогда ипотенуза меньше 90 гр. а буде разнаго виду, тогда ипотенуза всегда бываетъ больше 90 гр.

Доказ. Говорю 1 е. Ежели прямоугольнаго треугольника ABC (ф. 60) стороны AB, AC суть меньше 90 гр. тогда ипотенуза также меньше 90 гр.

Ибо продолжа бока AB, AC, въ BD, AF чтобъ были по 90 гр. явствуетъ, что B есть полюсъ дуги DF проходящей чрезъ D, и сѣкущей дугу AC на ея продолженiи въ F и внѣ треугольника ABC: по сему BE = 90 гр. а BC есть меньше 90 гр.

2 е. буде изъ сторонъ AB, AC (ф. 56) треугольника ABC прямоугольнаго въ A, каждая больше 90 гр. тогда ипотенуза

BC

BC есть меньше 90 гр. Ибо продолжа AB, AC пока встретятся въ D, будетъ △ DBC прямоугольной въ D (21), имѣющей съ △ ABC общую ипотенузу BC: но BD, CD суть меньше 90 гр. ибо они суплементы дугъ AB, AC: и тако по первому случаю ипотенуза BC есть меньше 90 гр.

3е. Когда въ прямоуг. треугольникѣ AIC (ф. 61) сторона AB есть больше 90 гр. а AC меньше 90 гр. тогда ипотенуза BC есть больше 90 гр. Ибо продолжа AC на 90 гр. въ F, то для прямова угла A точка F будетъ полюсъ дуги AB. Положа BD = 90 гр. и соединя дугу FD, (сѣкущую BC въ E) явно, что B есть полюсъ дуги FD: по сему BE = 90 гр. а BC больше 90 гр.

104. слѣдст. I. Понеже (102) наклонныя углы одного вида съ противными сторонами: по сему ежели въ прямоугольномъ треугольникѣ два наклонныя угла одного вида, тогда ипотенуза меньше 90 гр. а буде они разнаго вида; то ипотенуза бываетъ всегда больше 90 гр.

105. II. Обратно. Ежели ипотенуза прямоугольнаго треугольника меньше 90 гр. тогда косыя углы и стороны суть одного

виду

виду: но когда оная больше 90 гр. тогда стороны и углы суть разнаго виду.

106. III. Въ сферич. прямоугольномъ треугольникѣ ежели и потенуза и одинъ бокъ одного виду, тогда другой бокъ и противный ему уголъ меньше 90 гр. но буде ипотенуза и одинъ бокъ разнаго виду то другой бокъ и противный ему уголъ бываетъ всегда больше 90 гр.

* *

Основанiи вычисленiя прямоугольныхъ треугольниковъ.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ I.

107. Во всякомъ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ, имѣются всегда сiи пропорцiи: 1 я. радiусъ къ синусу ипотенузы, какъ синусъ одного острого угла къ синусу противолежащаго ему бока,

108. 2 я. радiусъ къ синусу одного бока, такъ тангенсъ одного остраго угла къ тангенсу противолежащаго своего бока.

Доказ. Пусть EDAFG (ф. 62) представляетъ осьмую часть сферы., которой четвертныя плоскости EDFG, EDLC суть прямостоящiя на чертвертнойже плоскости ADFB, а четверть круга ADGC также прямо стоитъ на четверти круга EDFG.

Сферическаго треугольника ABC прямой уголъ при B, ипотенуза AC, бока суть BA, BC. Дугъ GF, CB на радіусы DF, DB проведи тангенсы HF, OB и синусы GM, CI. Назнача BL синусъ дуги AB, и CK синусъ дуги AC, соедини IK и OL. И тако линѣи HF, OB, GM, CI всѣ перпендикулярны къ плоскости ADFB. Но HD, CK, OL суть на одной плоскости ADGC, также и FD, IK, BL всѣ лежатъ въ одной плоскости ADFB.

По сему прямоугольныя треугольники HDF, CIK, OBL имѣющія равныя углы HDF, CKI, OLB (г. 338) суть подобныя. Того ради (г. 207) 1 е. DG : CK :: GM : CI, то есть, радіусъ къ синусу ипотенузы, такъ синусъ одного остраго угла къ синусу противолѣжащаго ему бока.

Понеже черта GM есть синусъ дуги GF размѣряющей сферич. уголъ CAB (17). Отъ сюду 2 е. DF : LB :: EH : BO, то есть, какъ радіусъ къ синусу одного бока, такъ тангенсъ одного остраго угла къ тангенсу противолѣжащаго ему бока.

109. Слѣдст. Во всякихъ прямоугольныхъ треугольникахъ какъ BAC, BDE имѣющихъ общей острой уголъ B (ф. 60) синусы ипотенузъ

BC

BC, BE всегда въ одномъ содержаніи съ синусами ихъ перпендикуляровъ AC, DE: а синусы основаніи BA, BD въ одномъ содержаніи съ тангенсами перпендикуляровъ AC, DE.

По слабости воображенія ф. 62, для яснѣйшаго понятія о сей истиннѣ надлежитъ подобную оной фигуру изъ картузной бумаги вырезать, и по ней о предписанномъ доказательствѣ разсуждать.

довод ъ тояже истинны по фигурѣ 54.

1 с. Да будетъ сферическій треугольникъ ABC прямоугольный въ A составленны изъ трехъ плоскостей или секторовъ DCB, DBA, DAC. Изъ какой либо точки F взятой на сѣченіи DA прямостоящихъ плоскостей DCB, DBA, проведи къ DA перпендикуляръ FG, а по плоскости DAB, къ DB назнача перпенд. FE соедини EG: тогда ∠FEG будетъ мѣра (г. 337) наклоненію плоскостей DBC, DBA или сферическаго угла ABC.

Учиня то, въ △ EFG прямоугольн. при F (для GF прямостоящей къ плоскости DAB) будетъ (тр. 31) FG : GE :: синусъ ∠FEG : R, и въ △ FDG прямоугольномъ въ F, GD : FG :: R : синусу ∠GDF. По сему (г. 197) FG × GD : GE × FG :: син. ∠FEG × R : R × син. ∠GDF. Раздѣля первое содержаніе на FG а второе на R (г. 191) выдетъ GD : GE :: син. ∠

 FEG:

FEG : син. ∠GDF. Но въ △ DEG прямо-угольномъ въ E, есть GD : GE :: R : син. GDE. Слѣдст. R : син. ∠GDE :: син. ∠FEG : син. ∠GDF, то есть, радїусъ къ синусу ипотенузы BC, такъ синусъ угла ABC, къ синусу противнаго ему бока AC.

2е. въ △ FED прямоугольномъ въ E будетъ (пр. 31) FE : FD :: син. FDE : R, и въ △ GFD прямоуг. въ F (пр. 32) FD : FG :: R : танг. FDG. По сему (г. 197) EF × FD : FD × FG :: син. ∠FDE × R : R × танг. ∠FDG. раздѣля первое содержанїе на FD, а второе на R, выдетъ FE : FG :: син. ∠FDE : танг. ∠FDG. Но въ △ FGE прямо-угольномъ въ F, есть FE : FG :: R : танг. FEG. Слѣдст. R : танг. ∠FEG :: син. ∠FDE : танг. ∠FDG, то есть, радїусъ къ танг. угла AEC, такъ синусъ бока AB къ танг. бока AC. Перемѣня сїе (г. 196) выдетъ R : син. AB :: танг. ∠ABC : танг. AC, и обратно, син. AB : R :: танг. AC : танг. ∠ABC.

ПРЕДЛ. II.

110. Прямоугольнаго треугольника ABC (ф. 60) продолжа стороны BC до G, AC до I, BA до D чтобъ CG, CI, BD были по 90 гр. потомъ ежели отъ точки B яко полюса описать дугу HED, такъ

чтобъ

чтобъ дуга EH, была 90 гр. а отъ полюса C дугу HIG; то чрезъ сїе начертанїе здѣлаются два прямоугольныя треугольника CEF, HIF, коихъ части иныя равныя а другїя суть суплементы частей сферическаго треугольника ABC.

Доказ. Понеже 1 е. В будучи полюсъ дуги FED, то дуга BE и BD по 90 гр. и прямостоящїя на дугѣ EFD: дуги FED, FCA будучи прямостоящїя къ BAD, также по 90 гр. и ихъ точка F есть полюсъ дуги BAD. По сему треугольникъ FCE есть прямоугольны въ E, коего угла F есть мѣра дуга AD = 90 = дополненїю бока AB: бокъ FE есть дополненїе дуги ED измѣряющей уголъ B, ипотенуза FC есть дополненїе бока CA, а бокъ CE = дополненїю бока BC.

2 е. Ибо дуга HE = 90 гр. и прямостоящая къ CEG, то точка H есть оной полюсъ (24), и дуга HIG = 90 гр. (3). Дуги CI, CG суть также по 90 гр. и перпендикулярны къ дугѣ HIG; по сему треугольникъ HIF есть прямоуголный въ I, его бокъ HI = дополненїю дуги IG размѣряющей ∠ BCA, другой бокъ IF = CA, по тому что у дугъ CA, IF есть общее дополненїе дуга CF: по томужъ его ипотенуза HF = углу ABC, а уголъ FHI = ипотенузе BC, и уголъ HFI = дополненїю бока AB.

 На

На сихъ то двухъ предложенiяхъ основаны правила вычисленiя всякихъ сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, какъ ниже явствуетъ.

* *

пропорцiи для вычисленiя сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ

Для вычисленiя угловъ и сторонъ всякихъ сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, надобно всегда полагать А у прямаго угла: В, С непременно при другихъ углахъ и дѣлать пропорцiи, какiя въ слѣдующей таблицѣ показаны.

Сiи пропорцiи собраны въ оную таблицу для того, чтобъ въ вычисленiи по какому нiесть возможному заданiю сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, не искать по предписаннымъ правиламъ удобнѣйшей къ тому пропорцiи, но брать токмо изъ нея по сходству съ заданiемъ надлежащiя правила, и находить (чрезъ натуральныя синусы либо тангенсы, а легче ихъ логарифмами) неведомыя части треугольника. О происхожденiиже сихъ пропорцiи ниже въ N. 141, 142 и 143, обстоятельно изтолковано.

Таблица для рѣшенія по всѣмъ возможнымъ случаямъ сферическихъ треугольниковъ ABC прямоугольныхъ въ A (ф. 60).

No.	даны.	искать.	пропорціи.	Тогда искомое меньше 90 гр. ежели
111	AB, AC	BC	R: кос AB :: кос AC: кос BC	AB и AC под.
112		B	R: син AB :: кот AC: кот B	AC мен. 90 г
113		C	R: кот AB :: син AC: кот C	AB мен. 90 г.
114	AB, BC	AC	кос AB: R :: кос BC: кос AC	BC и AB под.
115		B	R: тан AB :: кот BC: кос B	BC и AB под.
116		C	син BC: син AB :: R: син C	AB мен. 90 г.
117	AB, B	AC	R: син AB :: тан B: тан AC	B мен. 90 г.
118		BC	R: кот AB :: кос B: кот BC	AB и B подоб.
119		C	R: кос AB :: син B: кос C	AB мен. 90 г.
120	AB, C	AC	R: тан AB :: кот C: син AC	сумнительны
121		BC	син C: син AB :: R: син BC	тоже
122		B	кос AB: кос C :: R: син B	тоже
123	AC, BC	AB	кос AC: кос BC :: R: кос AB	BC и AC под
124		B	син BC: син AC :: R: син B	AC мен. 90 г.
125		C	R: тан AC :: кот BC: кос C	AC и AB под.
126	AC, B	AB	R: тан AC :: кот B: син AB	сумнительны
127		BC	син B: син AC :: R: син BC	тоже
128		C	кос AC: кос B :: R: син C	тоже
129	AC, C	AB	R: син AC :: тан C: тан AB	C мен. 90 г.
130		BC	R: кот AC :: кос C: кот BC	AC и C подоб
131		B	R: кос AC :: син C :: кос B	AC мен. 90 г.
132	BC, B	AB	R: тан BC :: кос B: тан AB	BC и B подоб.
133		AC	R: син BC :: син B: син AC	B мен. 90 г.
134		C	R: кос BC :: тан B: кот C	BC мен. 90 г.
135	BC, C	AB	R: син BC :: син C: син AB	C мен. 90 г.
136		AC	R: тан BC :: кос C: тан AC	BC и C подоб.
137		B	R: кос BC :: тан C: кот B	BC и C подоб.
138	B, C	AB	син B: кос C :: R: кос AB	C мен. 90 г.
139		AC	син C: кос B :: R: кос AC	B мен. 90 гр.
140		BC	R: кот B :: кот C: кос BC	B и C подоб.

141 Примѣч. употребленїе сея таблицы отъ истолкованїя только первой строки лѣгко понять можно. Она изъявляетъ, даны двѣ стороны AB, AC сферическаго прямоугольнаго треугольника, сыскать ипотенузу BC: по сему надобно учинить сїю пропорцїю, какъ радїусъ къ синусу дополненїя бока AB, такъ синусъ дополненїя бока AC къ синусу дополненїя ипотенузы. Но понеже синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы принадлежатъ дугамъ, кои меньше 90 гр. равно и суплементамъ оныхъ (тр. 6); сего ради посредствомъ N. 102 и послѣд. показано въ пятомъ столцѣ, что искомая часть, какъ въ семъ примѣрѣ BC есть меньше 90 гр. буде AB и AC подобны или оба одного вида, то есть, ежели оба больше либо меньше 90 гр. Случаи означены сумнительными, суть тѣ въ коихъ позаданїю неможно узнать, большели или меньше искомой бокъ либо уголъ нежели 90 гр. токмо оныя случаи весьма рѣдки въ Астрономическихъ выкладкахъ, гдѣ употребляются въ прямоуголныхъ треугольникахъ только тѣ дуги, кои меньше 90 гр. по тому, что когда случатся большїя дуги, тогда берутся ихъ суплементы

лементы, продолжа ихъ до полуокружности. Напримѣръ ежели потребно вычислять треугольникъ ABC (ф. 56), тогда убѣгая замѣшательства, надобно рѣшить треугольникъ BCD, коего всѣ стороны суть меньше 90 гр. также и углы кромѣ D, и вычисля его всѣ части, найдутся оныя и въ данномъ треугольникѣ ABC.

* *

ИЗЪЯСНЕНІИ ПРЕДПИСАННЫХЪ ПРОПОРЦІИ.

142. Слѣдст. отъ N. 107. 1е. Пропорція въ N. 133 есть таже что и въ N. 107. Взявъ ∠C вмѣсто B будетъ N 135. Обратя оную выдутъ N. 124 и N. 127. Обратя пропорцію N. 135 выдетъ N. 116, N. 121.

2е. Въ прямоугольномъ треугольникѣ FCE (ф. 60), R : сін FC :: сін CFE : сін CE, то есть, въ треугольникѣ ABC, R : кос AC :: кос AB : кос BC, сія пропорція есть въ N. 111, а обратя оную выдутъ N. 114, N. 123.

3е. Въ томже треугольникѣ FCE, паки R : сін. FC :: сін C : сін FE, или въ △ ABC, R : кос AC :: сін. C : кос B, что поставлено въ N. 131, а обратя оную выдутъ N. 128, N. 139.

4е. Вѣ треугольникѣ HIF, R : син HF :: син F : син HI, или вѣ треугольникѣ AIC, R : син B :: кос AB : кос C, сїя поставлена вѣ N. 119, обратя оную будетѣ N. 122 и N. 138.

143. Слѣдст. отѣ N. 108. 1е. Таже пропорцїя есть вѣ N. 117, и взявѣ ∠ C вмѣсто B выдетѣ N. 129.

2е. Обратя N. 117, будетѣ танг. B : R :: танг. AC : син AB, но (тр. 17) танг. B : R :: R : кот. B. По сему R : кот B :: танг. AC : син AB, сїя пропорцїя вѣ N. 126.

3е. Обратя N. 129 будетѣ танг. C : R :: танг. AB : син. AC. Но (тр. 17) танг. C : R :: R : кот C. По сему R : кот C :: танг. AB : син AC, сїя вѣ N. 120.

4е. Вѣ △ FCE (ф. 60) слѣдуетѣ (108) R : сїн. FE :: танг. F : танг. CE, то есть, (110) R : кос B :: кот AB : кот BC, сїя пропорцїя вѣ N. 118. Но какѣ оная послѣдняя пропорцїя изъявляетѣ во обще что радїусѣ кѣ синусу одного косаго угла, такѣ котангенсѣ бока прилежащаго сему углу кѣ котангенсу ипотенузы. По сему R : кос. C :: кот. AC : кот BC. Отѣ сего вышелѣ N. 130.

5е. Вѣ томже треугольникѣ FCE, R : син CE :: тан C : танг FE, то есть (110) R:

R : кос BC :: танг C : кот B, что вЪ N. 137. Но сїя пропорцїя показуетЪ что радїусЪ кЪ косинусу ипотенузы, какЪ тангенсЪ одного косаго угла кЪ котангенсу другова, по сему поставлено вЪ N. 134, R : кос BC :: тонг B : кот C.

6 е. ВЪ треугольникѢ HIF, R син HI :: танг H : тан IF, то есть, R : кос C :: танг BC : тан, AC, N. 136. Понеже сїя пропорцїя изЪявляетЪ во обще что радїусЪ кЪ косинусу одного косаго угла, какЪ тангенсЪ ипотенузы кЪ тангенсу прилежащаго бока тому углу: по сему вЪ N. 132, радїусЪ : кос B :: танг BC : танг AB.

7 е. ВЪ томже треугольникѢ HIF, R : син IF :: тан F : танг HI, то есть, R : син AC :: кот AB : кот C, оная вЪ N. 113. Но какЪ сїя пропорцїя во обще значитЪ что радїусЪ кЪ синусу бока, такЪ котангенсЪ другова бока кЪ котангенсу угла противолежащаго сему другому боку; того ради R : син AB :: кот AC : кот B, сїе вЪ N. 112.

8 е. Обратя пропорцїю N. 118 будетЪ кот AB : R :: кот BC : кос. B, или (тр. 17) R : танг AB :: котанг BC : кос B, сїе вЪ N. 115.

9 е. Обратя N. 137, выдетЪ танг C : R ::

кот.

кот B : кос BC. Но танг C : R :: R : кот C. По сему R : кот C :: кот B : кос BC, сїе въ N. 140.

10 e. Наконецъ обратя въ N. 136, будетъ танг BC : R :: танг AC : кос C. Но танг. BC : R :: R : кот BC. По сему R : кот BC :: танг AC : кос C, сїе поставлено въ N. 125.

Такимъ образомъ произведены всѣ пропорцїи показанныя въ предписанной таблицѣ, изъ коихъ для удобнѣйшаго (стр. 35) вычисленїя большая часть по возможности выведена таких, кои съ радїуса начинаются.

* *

О рѣшенїи сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ генеральнымъ правиломъ.

144. Во всякомъ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ стороны прямаго угла съ дополненїями прочихъ трехъ частей Неперомъ * названы пятью частьми круглыми, изъ коихъ буде три вступятъ въ рѣшенїе, то есть, двѣ данныя а одна искомая, то оныя чрезъ прямой уголъ неперерываются (сряду счисляются). Одна сихъ частей находящаяся между двухъ несчитая прямаго угла называется

* Їоанъ неперъ баронъ мерхистонскїй шотландецъ, первый изобретатель логарифмовъ и сего правила.

вается средняя, а прочїя двѣ той ближнїя суть крайнїя прилежащїя, а чрезъ часть отстоящїя отъ средней (несмотря на прямой уголъ) имянуются крайнїя удаленныя.

Въ слѣдующей табличкѣ всякаго сферическаго треугольника ABC прямоугольнаго въ А (ф. 60), каждой средней части показаны крайнїя прилежащїя и удаленныя.

среднїя	краин. прилеж.	краин. удаленныя
BA	дополн. B, CA	допол. C, допол. BC
CA	AB, дополн. C	допол. BC, допол. B
дополн. C	AC, допол. BC	AB, дополн. B
дополн. BC	допол. B, допол. C	AB, AC
дополн. B	AB, дополн. BC	AC, дополн. C

По сему положенїю всѣ вышепоказанныя для рѣшенїя сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ 30 пропорцїевъ, приводятся въ слѣдующее генеральное или общее правило.

145. Произведенїе радїуса синусомъ среднїя части равно произведенїю тангенсовъ краинихъ прилежащихъ, и равно произведенїю косинусовъ крайнихъ удаленныхъ.

* *

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НА ОБЩЕЕ ПРАВИЛО

146. Доводъ сего правила состоитъ въ трехъ слѣдующихъ случаяхъ; ибо среднею частью

бываетъ

бываетъ либо дополненіе угла B, тоже что дополненіе угла C, или дополненіе ипотенузы BC, либо бокъ AB, тоже что бокъ AC.

Случ. I. Пусть дополненіе угла C есть средняя часть, тогда AC и дополненіе ипотенузы BC, суть крайнія прилежащія. Понеже (125) R : тан. AC :: котан. BC : кос. C. И тако (г. 196) R × кос. C = тан. AC × кот. BC. Тояже средніяя части дополненія угла C, крайнія удаленныя суть дополненіе угла B, и бокъ AB. Но (122) R : син. B :: кос. AB : кос. C; по сему R × кос. C = син. B × кос AB.

II. Ежели средняя часть есть дополненіе ипотенузы BC, тогда дополненіи угловъ B, C суть крайнія прилежащія. По сему (140) R : кот. B :: кот. C : кос. BC. Но R × кос. BC = кот. C × кот. B.

При той же средней (дополненіе ипотенузы BC) крайнія удаленныя AB, AC; по сему (111) R : кос. AB :: кос. AC : кос. BC. Но R × кос. BC = кос. AC × кос. AB.

III. Когда же средняя часть есть бокъ AB, тогда AC и дополненіе угла B суть крайнія прилежащія. Но (126) R : тан. AC :: кот. B : син AB. По сему R × син. AB = кот. B × тан. AC.

При

Притой же средней AB, крайнїя удаленныя суть дополненїе ипотенузы BC, и дополненїе угла C. А понеже (135) R: син. BC :: син. C : син. AB. По сему R× син. AB = син. BC× син. C.

147. Слѣдст. По расположенїи общаго правила или сихъ двухъ равностей въ пропорцїи выдетъ (г. 195).

1 е. R : тангенсу одной крайней :: тангенсъ другой къ синусу средней части, и R : кос. одной крайней :: кос. другой къ синусу средней части. Того ради для сыску средней въ прилежащихъ, и въ удаленныхъ пропорцїю должно начинать съ радїуса, а крайнїя полагать средними ея членами.

2 е. Ибо (196) танг. одной крайней къ R :: синусъ средней части къ танг. другой крайней; также косин. одной крайней къ R :: синусъ средней части къ косинусу другїя крайнїя. Изъ сего явствуетъ что для сыску одной крайней, какъ въ прилежащихъ, такъ и въ удаленныхъ пропорцїя начинается съ данной крайней части, а радїусъ и средняя часть бываютъ ея средними членами.

148. Примѣч. во всѣхъ сихъ пропорцїяхъ средней части берется синусъ, а въ дополненїяхъ косинусъ

нусъ. крайнихъ прилежащихъ тангенсы а въ дополненіяхъ котангенсы: но крайнихъ удаленныхъ косинусы а въ дополненіяхъ синусы.

Памятуя сіе общее правило можно по оному равно какъ посредствомъ таблицы рѣшить всякія прямоугольныя сферическія треугольники, а кое изъ оныхъ двухъ способовъ въ вычисленіи употреблять, сіе на читателево благоизволеніе оставляю.

* *

Основаніи вычисленія косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

149. предл. I. во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы угловъ всегда пропорціональны синусамъ противолежащихъ своихъ сторонъ.

Доказ. Ибо треугольникъ ABC (ф. 63), опустя въ немъ изъ угла C перпенд. CD, раздѣлится на два прямоугольныя треугольника ACD, BCD: тогда (107) R : син. AC :: син. A : син. CD, и R : син. BC :: син. B : син. CD. По сему (г. 196) R × син. CD = син. AC × син. A = син. BC × син. B, и тако (г. 197) син. A : син. BC :: син. B : син. AC.

150. слѣдст. въ двухъ сферическихъ треугольникахъ ежели всѣ углы сходственныя равны, то и стороны ихъ между собою равны, и сами треугольники между собою равныя, и обратно. Ибо равныя углы и равныя дуги имѣютъ одни синусы.

151. II. ежели какой либо треугольникъ ABC раздѣленъ въ два прямоугольныя треугольника ACD,

BCD

BCD перпендикуляромъ изъ угла C раздѣляющимъ бокъ AB, на части AD, BD, то предлагаю:

1 е. Синусы частей AD, BD, обратно пропорціональный тангенсамъ, а прямо котангенсамъ угловъ прилежащихъ A и B (ф. 63, 64 и 65).

Доказ. Ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ ADC есть (142) R : син. AD : : танг. A : танг. CD; и въ прямоугольн. треугольникѣ BCD, есть также R: син. BD : : танг. B : танг. CD. По сему R × танг. CD = син. AD × танг. A = син. DB × танг. B. Слѣдств. син. AD : син. DB : : тан. B : тан. A (г. 195), или син. AD : син. DB : : кот. A : кот. B (тр. 17).

152. 2 е. Косинусы тѣхъ же частей AD, BD, суть пропорціональны косинусамъ прилежащихъ себѣ сторонъ AC, BC.

Доказ. Ибо въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, BCD есть (111) R : кос. DC : : кос. AD : кос. AC; и еще R : кос. DC : : кос. DB : кос. BC. По сему кос. AD : кос. AC : : кос. DB : кос. BC.

153. 3 е. Косинусы двухъ угловъ DCA, BCD пропорціональныи котангенсамъ сторонъ BC, AC, а обратно ихъ тангенсамъ.

Доказ. Понеже въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, BCD есть (130) R : кот. DC : : кос. BCD : кот. BC; и R: кот DC : : кос. DCA : кот. AC. Посему для равныхъ содержаніи кос. BCD : кос. DCA : : кот. BC : кот. AC : : танг. AC : танг. BC.

154. 4е. Синусы тѣхъ же двухъ угловъ BCD, DCA пропорціональны косинусамъ угловъ B, A.

Доказ. Понеже (131) R : кос. DC :: син. DCA : кос. A; и R : кос. DC :: син. BCD : кос. B. По сему син. BCD : син. DCA :: кос. B : кос. A.

155. Лемма I. Произведеніе синуса верзуса суплемента дуги AB (тр. ф. 1) полрадіусомъ, равно квадрату косинуса CF половины той дуги CN. то есть $aD \times \frac{1}{2} R = CF□$.

Доказ. Ибо проведя aB, треугольники aDB, CAF суть подобныя (г. 130). По сему (г. 207) aD : aB :: CF : CA. Но какъ aA въ двое больше AC, то (г. 206) и aB есть въ двое больше CF; и тако aD : 2CF :: CF : CA, и (г. 192) aD : CF :: CF : $\frac{1}{2}$CA. Сего ради aD × $\frac{1}{2}$ CA = CF × CF, то есть, $aD \times \frac{1}{2} R = CF□$.

156. II. Произведеніе разности синусовъ верзусовъ какихъ либо двухъ дугъ AK, AF (тр. ф. 2) полрадіусомъ, равно произведенію синуса полсуммы, синусомъ полразности тѣхъ же дугъ AK, AF.

Доказ. Изъ точки A опустя перпендикуляръ AP, будетъ AP синусъ полсуммы; KI синусъ полразности, а NM = KG = разности синусовъ верзусовъ дугъ AK, AF. По томъ для равноугольныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ CAP, FGK (ибо по сочиненію линѣи AP, FK паралельныя, а ∠CSN = ∠FSB, отъ чего и ∠SFB = ∠PCA) будетъ

детъ (г. 207) AC : AP :: FK : KG, и (г. 192) $\frac{1}{2}$ AC : AP :: $\frac{1}{2}$ FK : KG. По сему KG × $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ FK или KI × AP (г. 194).

157. III. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC (ф. 67) какъ произведенїе синусовъ боковъ AB, BC обдержащихъ ∠B, къ квадрату радїуса, такъ разность синусовъ верзусовъ бока AC и суммы боковъ AB, BC къ синусу верзусу супплемента угла B.

Доказ. 1е. Пусть PBAN представляетъ четверть сферы, и на ней лѣжитъ сферическїи треугольникъ ALC при полюсѣ B прямаго круга PRN; PN есть (37) проекцїя большаго полкруга PRN, а хорда QM, есть проекцїя тому паралельнаго полкруга чрезъ уголъ C проходящаго. По сему дуга BC = BM = BQ, и AB + BC = дугѣ AQ, коей синусъ есть QX, а изъ Q опущенный перпенд. на продолженный радїусъ AO, определитъ AX синусъ верзусъ дуги AQ. Притомъ же явно, что AE есть синусъ дуги AB, и QF синусъ дуги BQ = BC.

2е. Понеже хорда LH есть проекцїя круга перпендикулярнаго къ радїусу AO и прошедшаго чрезъ тотъ же уголъ C. По сему дуга AC = AL = AH, и HI есть синусъ, а AI синусъ верзусъ той дуги AH или AC: и тако IX = разности синусовъ верзусовъ дуги AC и суммы дугъ AB, BC.

3 е. Продолжа на сферѣ дугу EC до большаго круга PRN, будетъ (18) дуга RN мѣра углу B, коего синусъ есть RG, изъ R на дiаметръ сферы опущенны перпендикуляръ, а PG есть синусъ верзусъ суплемента угла B.

4 е. Понеже (г. 260) подобныхъ фигуръ сходственныя величины пропорцiональны, то есть, круговъ радiусы OP, QF косинусамъ GO, FC угла B. Иначе, помысли что четверть круга BOP на радiусѣ OB перегнута такъ что P придетъ въ R, а Q въ C, тогда прямоугольныя треугольники POG QFC будутъ подобныя, для равныхъ угловъ POG, QFC (г. 130). По сему (г. 270) FQ : FC :: OP : OG, и (г. 196) FQ : FQ + FC = QC :: OP : OP + OG = PG, то есть, FQ : QC :: R : PG, или FQ : R :: QC : PG.

5 е. Наконецъ для подобныхъ треугольниковъ AEO, DIC, DXQ, слѣдуетъ AE : AO :: DI : DC :: DX : DQ, и (г. 200) AE : AO :: DI + DX : DC + DQ, или AE : R :: IX : QC; но FQ : R :: QC : PG, по сему (г. 197) AE × FQ : RR :: QC × IX : QC × PG. Раздѣля послѣднѣе содержанiе на QC выдетъ AE × FQ : RR :: IX : PG, то есть, какъ произведенiе синусовъ дугъ AB, BC къ квадрату радiуса,

такъ

такъ разность синусовъ верзусовъ дуги AC и суммы дугъ AB, BC къ синусу верзусу сулпемента угла B содержимаго сими дугами.

158. III. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC есть сія пропорція, какъ произведеніе синусовъ сторонъ AB, BC къ квадрату радіуса, такъ синусъ полсуммы всехъ трехъ умноженной синусомъ разности между той полсуммы и бока AC къ квадрату косинуса угла B содержимаго боками AB, BC.

Доказ. Понеже (157) син AB × син BC : RR : : IX : PG. Умножа содержаніе IX : PG на $\frac{1}{2}$ R выдетъ син AB × син BC : RR : : IX × $\frac{1}{2}$R : PG × $\frac{1}{2}$R. Но (156) IX × $\frac{1}{2}$ R = син $\frac{CB + BA + AC}{2} \times \frac{CB + BA + AC}{2} - AC$, а PG × $\frac{1}{2}$ R = квадрату косин. $\frac{1}{2}$ угла B (155). По сему син. AB × син. BC : RR : : син. $\left(\frac{CB + AB + AC}{2}\right)$ × син $\left(\frac{CB + AB + AC}{2} - AC\right)$: квадрату косинуса половины угла B.

Слѣдст. I. Положа $\frac{CB + BA + CA}{2} = S$, и $\frac{CB + AB + CA}{2} - AC = D$, будетъ син. AB × син. BC : RR : : син. S × син. D : квадрату кос. $\frac{1}{2}$ угла B. По сему $\frac{RR}{син.\ AB \times син.\ BC} = \frac{квадр.\ косин.\ \frac{1}{2} \angle B}{син.\ S \times син.\ D}$, и $\frac{RR}{син.\ AB \times син.\ BC}$, или $\frac{R}{син.\ AB} \times \frac{R}{син.\ BC}$ × син. S × син. D = квадр. косинуса $\frac{1}{2}$ угла B.

 A

но перемѣня сїе логарифмами (Ар. стр. 372 и 373) то сумма четырехъ синусовыхъ логарифмовъ, а имянно 1. Арифмет. дополненїе синуса бока AB, 2. Арифмет. дополн. син. бока BC (стр. 39). 3. логар. синуса полсуммы трехъ сторонъ. 4. логар. синуса половины сея суммы безъ AC, равна двойному логар. кос. $\frac{1}{2}\angle B$, то есть полсумма четырехъ сихъ логарифмовъ равна логарифму косинуса полугла B.

159. II. Предписанную пропорцїю можно раздѣлить на двѣ тако: понеже син AB × син. BC : RR :: син. S × син. D : квадрату кос. $\frac{1}{2}\angle B$. По сему син. AB × син. BC × квадр. кос. $\frac{1}{2}\angle B$ = RR × син. S × син. D. Отсюду $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. BC} \times \text{квадр. кос. } \frac{1}{2}\angle B}{RR}$ = син. S × син. D, или $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. BC}}{R} \times \frac{\text{квад. кос. } \frac{1}{2}\angle B}{R}$ = син. S × син. D. Сего ради (г. 195) $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. BC}}{R}$: син. S :: син D : $\frac{\text{кв. кос. } \frac{1}{2}\angle B.}{R}$ Положа $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. BC}}{R}$ = P, $\frac{\text{квад. кос. } \frac{1}{2}\angle B.}{R}$ = Q, выдутъ слѣдующїя двѣ пропорцїи ...

1 я. R : син. AB :: син. BC : син. P. 2 я. син. P : син. S :: син. D : Q. А понеже Q = $\frac{\text{квад. кос. } \frac{1}{2}\angle B}{R}$; для того съ логар. синуса Q сложи логарифмъ радїуса, то половина суммы оныхъ будетъ логар. кос. $\frac{1}{2}\angle B$.

160. IV. въ сферическомъ треугольникѣ ABC произведенїи синусовъ боковъ AB, BC содержащихъ

уголъ

уголъ Вкъ квадрату радїуса, какъ произведенїе полъ суммы третьей стороны и разности содержащихъ АВ, ВС чрезъ полразность третьей стороны и разности содержащихъ къ квадрату синуса половины того угла В, (ф. 68).

Доказ. Пусть HBKLM представляетъ четверть сферы коей центръ O, и полукруги HBK, HLK суть прямостоящїя между собою, также и черта OB къ HK.

Продолжа BC до L, будетъ дуга HML мѣра углу ABC (18), и HQ = $\frac{1}{2}$ хорды HL есть синусъ $\frac{1}{2}$ (дуги HML = $\frac{1}{2}$) угла ABC.

Проведи радїусъ OQM, и LP, QN перпенд. къ HK; тогда LP = синусу, а HP = син. верзусу угла B, и HN = NP (г. 206). Но OQ есть перпенд. къ HL (г. 70); то въ прямоуг. треугольникѣ HQO, будетъ OH : HQ :: HQ : HN (г. 212), и (г. 194) OH × HN = HQ □ = квадрату синуса $\frac{1}{2}$ угла B.

Положи BD = BE = BC, и AF = AG = AC, тогда полукружїе DCE паралельное къ HLK пресѣчется отъ полкруга FCG прямостоящаго къ плоскости HBK въ линѣе CI (г. 336) прямостоящей къ DE (г. 346) Дуга DC и синусъ верз. DI суть подобны дугѣ HL и син. верзусу HP (8 и г. 254). Посему рад. OH : рад. DS :: PH : ID $= \left(\frac{PH}{OH} \times DS =\right) \frac{2HN}{HO} \times DS$.

 Проведя

Проведя OR паралельно къ FG, будетъ дуга AR = (90 гр. =) дугѣ BK, и RK = AB. По сему ∠ DIF = (∠ KOR = дугѣ RK =) дугѣ AB. Еще DS = (SE = син. дуги BE =) синусу дуги BC, и AD = (BD − BA = BC − AB) разности сторонъ около угла B. Также ∠ DFI = $\frac{1}{2}$ дуги (DG = AG + AD =) AC + AD, чего синусъ есть $\frac{1}{2}$ ID (тр. 30), а дуга FD = (AF − AD =) AC − AD, коей синусъ есть $\frac{1}{2}$ DF.

Но въ △ DFI, син. ∠ DIF : син. ∠ DFI :: (FD : ID ::) $\frac{1}{2}$ FD : $\frac{1}{2}$ ID (тр. 30), или ∠ DIF : DFI :: $\frac{1}{2}$ FD : $\frac{HN}{OH}$ × DS. По сему син. ∠ DIF × DS × $\frac{HN}{OH}$ = син. ∠ DFI × $\frac{1}{2}$ FD (г. 194), и син. ∠ DIF × DS × $\frac{HN}{OH}$ × OH = син. ∠ DFI × $\frac{1}{2}$ FD × OH (г. 191), или син. ∠ DIF × DS × HN = син. ∠ DFI × $\frac{1}{2}$ FD × OH; и тако син. ∠ DIF × DS : син. ∠ DFI × $\frac{1}{2}$ FD :: OH : HN (г. 195) :: OH × OH : HN × OH = HQ □ (г. 191). Слѣдственно син. ∠ DIF × DS : син. ∠ DFI × $\frac{1}{2}$ FD :: OH □ : HQ □, или син. AB × син. BC : син. $\frac{1}{2}$ (AC + AD) × син. $\frac{1}{2}$ (AC − AD) :: RR : квадрату синуса $\frac{1}{2}$ ∠ ABC, или квадр. син. $\frac{1}{2}$ ∠ ABC = $\frac{\text{син. } \frac{1}{2} \angle (AC + AD) \times \text{син. } \frac{1}{2} (AC - AD)}{\text{син. } AB \times \text{син. } BC}$ × RR (г. 194).

положа

Положа теперь R = 1 . Λ, вмѣсто слова логарифмъ, будетъ 2 Λ, синуса $\frac{1}{2}\angle$ ABC = Λ син. $\frac{1}{2}$ (AC + AD) + Λ, син. $\frac{1}{2}$ (AC − AD) − Λ син. AB − Λ. син. BC (Ариф. стр 372 и 373). Положа λ за слово арифметическое дополненіе логарифма выдетъ ....

$$\frac{\lambda,\ c.AB + \lambda,\ c\cdot BC + \lambda,\ c\cdot \frac{1}{2}(AC + AD) + \lambda\ c.\ \frac{1}{2}(AC - AD)}{2}$$

= Λ, синуса полугла ABC.

то есть съ Арифмет. дополн. синуса одной стороны содержащей $\angle$ B, сложи арифмет. дополн. синуса другой содержащей стороны, и логар. синуса полсуммы третьей стороны и разности содержащихъ сторонъ, да логар. синуса полразности третьей стороны и разности содержащихъ сторонъ, тогда соотвѣтствующія градусы полсуммѣ сихъ четырехъ логарифмовъ удвоя выдетъ величина угла B.

161. V. во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABD (ф. 69), ежели отъ верха A на основаніе BD опустить перпенд. AE, то будетъ сія непремѣнная пропорція, какъ полтангенсъ основанія къ полутангенсу суммѣ двухъ сторонъ, такъ полутангенсъ разности сторонъ къ полутангенсу разности частей основанія DE, BE.

Вообрази что сфера OPDG стоитъ на плоскости въ D перпендикулярно своимъ діаметромъ DO, и пусть отъ полюса A разстояніемъ AB меньшаго бока написанъ малой кругъ FBbRF сѣкущей основаніе BD въ b, и сторона AD продолжена до F. По сему AB =

Ab = AR = AF. Сего ради DF есть сумма, а DR разность двухъ сторонъ треугольника DEC, а Db есть разность частей основанія DB; ибо BE = bE. Говорю что танг. $\frac{1}{2}$ DB : танг. $\frac{1}{2}$ DF :: танг. $\frac{1}{2}$ DR : танг. $\frac{1}{2}$ Db.

Доказ. Понеже дуги DA, DB продолженныя сходятся въ O, а око изъ O представляетъ (59) дуги DF, DR, DB, Db на прямыхъ линѣяхъ Df, Dr, Dd, Dh кои суть полутангенсы оныхъ дугъ. Но точки f, r, h, d находятся въ окружности (60). Слѣдственно (г. 221) Dd × Dh = Df × Dr, по сему (г. 195) Dd : Df :: Dr : Dh, то есть, т $\frac{1}{2}$ DB : т $\frac{1}{2}$ DF :: т $\frac{1}{2}$ DR : т $\frac{1}{2}$ Db. ч. н. д.

Всѣ оныя три предложенія состоятъ въ томъ, какъ по извѣстнымъ тремъ сторонамъ всякаго косоугольнаго сферическаго треугольника углы узнавать: по первымъ двумъ одною только пропорціею, а посредствомъ третьяго сыскавъ части основанія найдутся по предписанной таблицѣ и углы треугольника, а которое изъ нихъ въ вычисленіи употреблять, сіе на читателево произволѣніе оставляю.

* *

Общее рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ по всѣмъ возможнымъ заданіямъ.

Для вычисленія косоугольныхъ треу-

гольниковъ

гольниковъ можно предложить 12 задачь, изъ коихъ 8 требуютъ чтобъ заданный треугольникъ раздѣлить перпендикуляромъ на два прямоугольныя треугольника: но сїя дуга бываетъ внѣ и въ треугольникѣ; то прежде надобно разсмотреть въ какихъ случаяхъ она падаетъ внѣ и внутри треугольника: сего ради предлагаю ....

162. I. Перпендикуляръ CD изъ угла C сферическаго треугольника на противной бокъ AB опущенный падаетъ въ треугольникѣ (ф. 63) ежели другїя углы A, B одного вида, а внѣ онаго (ф. 64 и 65) буде уголъ A и B разнаго вида.

Доказ. Говорю 1 е. Ежели перпендикуляръ CD (ф. 63) падетъ въ треугольникѣ, то углы A и B одного виду. Ибо въ треугольникѣ CAD прямоугольномъ въ D, уголъ A одного виду (102) съ противною своею стороною CD: по томужъ доводу уголъ B одного вида съ дугою CD; и тако когда углы A и B одного вида, тогда перпендикуляръ CD подаетъ внутри треугольника.

2 е. Естьли перпендикуляръ CD (ф. 64 и 65) падетъ внѣ, то углы CBA, BAC суть разнаго вида; ибо (102) въ прямоугольн. треугольникѣ CDB уголъ B одного виду съ CD, и въ прямоугольн. треугольникѣ CAD, уголъ

CAD

CAD одного виду съ дугою CD; по сему углы CBD, и CAD суть одного вида. Сего ради (ф. 65) уголъ CBD и суплементъ угла CAD, то есть уголъ CAB суть разнаго вида, а (ф. 64) уголъ CAD и суплементъ угла CBD, то есть, угла CBA также разнаго виду.

163. II. Ежели двѣ меньшія стороны AC, BC (ф. 66) треугольника ABC суть одного вида; то перпендикуляръ CD изъ C на основаніе AB опущенны падетъ въ ономъ треугольникѣ.

Доказ. На AB положа AF = AC, и BE = BC проведи CF, CE, и отъ A и B опусти перпендикуляры AH, BG.

Сіе учиня, въ прямоугольныхъ треугольникахъ FAH, EGB стороны FH, GE суть неминуемо меньше 90 гр. ибо они половины дугъ CF, CE. Потомъ буде положимъ AE и BC или имъ равныя AF, BE меньше 90 гр. тогда сіи ипотенузы будутъ одного вида съ боками FH, GE; по сему углы AFH, BEG суть острыя (106), и слѣдственно одного виду съ боками AC, BC, и перпенд. CD падетъ на EF (162). Но ежели положить AF, BE больше 90 гр. тогда сіи ипотенузы суть разнаго виду съ боками FH, GE: посему (106) углы AFH, BEG

суть

суть тупыя, и потому одного виду съ боками AD, BC, сего ради перпендик. CD опять падетъ на EF. Сіе предложа слѣдуетъ....

ТАБЛИЦА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНІЯ СФЕРИЧЕСКИХЪ КОСОУГОЛЬНЫХЪ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

случ.	данныя	искомыя.	*пропорціи.*
164	A B BC	AC	Син. A : син. B :: син. BC : син. AC. (149). бокъ AC можетъ быть болше либо меньше 90 гр. и чрезъ одни данныя неопредѣляются (ф. 63, 64 и 65).
165	A B BC	C	R : кос. BC :: таг. B : кот. BCD. (134). Кос. B : кос. BAC :: син. BCD : син. ACD (154). Ежели углы A, B одного виду, то сумма угловъ BCD, ACD равна есть искомому углу C; но буде A и B разнаго виду, то разность угловъ BCD, ACD будетъ равна углу C (фиг. 63, 64 и 65).
166	A B BC	AB	R : кос. B :: танг. BC : танг. BD (132). Танг. A : танг. B :: син. BD : син. AD (163). буде A и B одного вида, то BD + AD = AB : но ежели разновидный то разность между BD и AD дастъ AB (ф. 63, 64 и 65).

167

случ.	данныя	искомыя.	пропорціи.
167	B C BC	AC	R : кос. BC :: танг. B : кот. BCD (134). возми сумму или разность угла BCD, и даннаго BCA, по паденію перпендикуляра CD и получите уголъ ACD; потомъ. . . . кос. BCD : кос. ACD :: кот. BC : кот. AC (153). Ежели углы ADC, B одного виду тогда AC меньше 90 гр. буде ADC и B разнаго вида, то AC больше 90 гр. (фиг. 63, 64, и 65).
168	B C BC	A	R : кос. BC :: танг. B : кот. BCD (134). возми сумму или разность угловъ BCD и BCA, смотря на паденіе перпендикуляра и получите уголъ ACD, потомъ син. BCD : син. ACD :: кос. B : кос. A (154). Ежели уголъ BCD меньше BCA, то искомой уголъ A одного виду съ даннымъ угломъ B: а буде BCD болше BCA, тогда A и B разнаго виду (162) фиг. 63, 64, и 65.
169	A AB BC	C	син. BC : син. AB :: син. A : син. C (149). уголъ C можетъ быть острой либо тупой и отъ данныхъ не опредѣляется.

случ.	данныя	искомыя.	пропорціи.
170	B BC AC	AB	R: танг. BC :: кос. B: танг. BD (132). кос. BC: кос. AC :: кос. BD: кос. AD (152). Ежели AC и BC одного вида, то BD + AD = AB (163), а буде разнаго вида, то AB равна разности оныхЪ, смотря по паденію перпендикуляра (ф. 63, 64, и 65).
171	B BC AC	C	R: кос. BC :: танг. B: кот. BCD (134). кот. BC: кот. AC :: кос. BCD: кос ACD (153). буде AC и BC одного вида то BCD + ACD = C, а когда нетЪ, то разность сысканныхЪ угловЪ BCD, ACD равна углу C (ф. 63, 64, 65).
172	B BC AB	A	R: танг. BC :: кос. B: танг. BD (132). возми сумму или разность дугЪ BD и AB, смотря на паденіе перпенд. и выдетЪ AD. по томЪ син. AD: син. BD :: танг. B: танг. A (151) ф. 63, 64, и 65.
173	B BC AB	AC	R: танг. BC :: кос. B: танг. BD (132). Сумма или разность дугЪ BD, AB равна AD. по томЪ, кос. BD: кос. AD :: кос. BC: кос. AC (152). Ежели AD и CD одного или равнаго вида, тогда бокЪ AC больше или меньше 90 гр. (ф. 63, 64, и 65).

174.

случ.	данныя	искомыя	пропорціи.
174	AB AC BC	A	какъ произведеніе синусовъ сторонъ AB, AC, къ произведенію синуса полсуммы протившнаго бока AC и разности боковъ AB, AC умноженной чрезъ синусъ полразности между тою же стороною BC, и разности сторонъ AB, AC, такъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса половины искомаго угла A (160) ф. 63, 64 и 65.
175	A B C	BC	какъ произведеніе синусовъ угловъ B и C, къ произведенію косинусовъ полсуммы угла A и разности угловъ B, C чрезъ полразность между угла A и разности угловъ B, C, такъ квадратъ радіуса къ квадрату косинуса половины бока BC. Сія пропорція полагаетъ что треугольникъ ABC перемененъ въ EFK (ф. 55), котораго сторона FK = ∠B, EK = ∠C, и FE = суплементу угла A, а уголъ K есть суплементъ бока BC (90).

176. Примѣч. Кромѣ четырехъ случаевъ (164, 169, 174, 175) прочія восемь можно иначе рѣшить посредствомъ предписанныхъ и слѣдующаго предложенія.

Понеже

Понеже опущенный перпендикулярЪ CD вЪ косоугольномЪ треугольникѢ ABC (ф. 63, 64 и 65) раздѢляетЪ его на два прямоугольныя треугольника ADC, BDC: и полагая всегда CD за общую крайнюю вЪ обоихЪ треугольникахЪ, будетЪ какая либо средняя часть одного прямоугольнаго треугольника кЪ такойже средней части другова, такЪ вторая крайняя перваго кЪ другой крайней втораго прямоугольнаго треугольника. Ибо по общему Неперову правилу (145) какЪ радїусЪ кЪ общей крайней CD, такЪ другая крайняя перваго прямоугольнаго треугольника кЪ средней его части, и какЪ радїусЪ кЪ общей крайней CD, такЪ другая крайняя втораго прямоугольнаго треугольника кЪ средней его части.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

О начертанїи и числительномЪ рѢшенїи сферическихЪ треугольниковЪ.

* *

ПримѢры прямоугольныхЪ треугольниковЪ.

177. ПримѢрЪ. I. вЪ прямоуголномЪ треугольникѢ ABC даны, ипотенуза AC = 64 гр. 40 м. бокЪ BC = 42 гр. 12 м. сыскать прочїя части.

Начертанїе.

1 е. Полагая данный бокъ на начальномъ кругѣ.

Начертя начальный кругъ проведи прямый ЕВ (ф. 70). Отмѣть отъ В до С данной бокъ (42 гр. 12 м.), и отъ С, яко полюса разстоянїемъ 64 гр. 40 м. начертя (77) малой кругъ аа, сѣкущей прямаго ВЕ въ А проведи прямой кругъ CD. Чрезъ С, А, D описанный косвенный (г. 100) кругъ совершитъ искомый треугольникъ АВС.

2 е. Полагая искомой бокъ на кругѣ начальномъ.

Изобразя первый кругъ проведи прямой кругъ СВ (ф. 71), и на немъ положи 42 гр. 12 м. отъ В до С (68). Отъ С разстоянїемъ 64 гр. 40 м. назнача (76) малой кругъ сѣкущей начальнаго въ А, проведи AD. Чрезъ А, С, D начерти (г. 100) косвенный кругъ, тогда АВС есть искомый треугольникъ, коего углы и бокъ измѣряются чрезъ N. 68, 70.

Вычисленїе.

Сыскать уголъ С (124) полагая въ таблицѣ прямой уголъ означенъ литерою В.

син АС, 64 г. 40 м.	0·04392	
къ радїусу 90 гр.	10·00000	уголъ С есть острый;
а син ВС, 42 г. 12 м.	9·82719	ибо онъ одного виду
къ син ∠С, 48 г. 00 м.	9·87111	съ бокомъ ВС.

сыскать

Сыскать уголъ А (125).

радїусъ 90 гр.	10.00000	уголъ А есть острый, потому что ипотенуза и данной бокъ суть одновидны.
къ кот АС, 64 г. 40 м	9.67524	
а тан ВС, 42 г. 12 м	9.95748	
къ кос ∠ А, 64 г. 35 м.	9.63272	

Сыскать другой бокъ АВ (123).

кос ВС, 42 г. 12 м.	0.13030	бокъ АВ меньше 90 г. ибо ипотенуза и бокъ ВС одновидны.
къ рад. 90 г.	10.00000	
а кос. АС, 64 г. 40 м.	9.63133	
къ кос. АВ, 54 г. 43 м.	9.70163	

178. II. въ прямоугольномъ треугольникѣ АВС даны ипотенуза АС, 64 г. 40 м. а уголъ АСВ, 64 г. 35 м. сыскать прочїя части.

начертанїе.

1 е. Полагая бокъ прилежащїй данному углу на начальномъ кругѣ (ф. 72).

Чрезъ какую либо точку С начальнаго круга опиши (73) косвенный кругъ CAD, дѣлающїй съ первымъ уголъ ВСА = 64 г. 35 м. данному углу. На косвенномъ кругѣ CAD, отмѣть дугу СА = данной ипотенузѣ 64 г. 40 м. (68). Чрезъ А проведи прямой кругъ АВ, и такъ здѣлается желаемый треугольникъ САВ.

2 е. Полагая противный бокъ данному углу на первомъ кругѣ (ф. 73).

Начертя первой кругъ и проведя прямой кругъ ОВ, напиши (81) косвенный

кругъ

кругъ ACD сѣкущей прямаго круга OB въ C подъ даннымъ угломъ 64 гр. 35 м. и будетъ часть AC включенная между прямымъ кругомъ OB и первымъ кругомъ равна данной ипотенузѣ 64 гр. 40 м. По сему ABC есть искомый треугольникъ, коего стороны AB, BC найдутся по чертежу чрезъ N. 68, а уголъ A чрезъ N. 70.

Вычисленіе.

Сыскать противный бокъ данному углу (133).

рад. 90 гр.	10.00000	подобный данному углу
къ син. ипот. 64° 40'	9.95608	
а син. дан ∠ угла 64 35	9.95579	
къ син. прот. стор. 54 43	9.91187	

Сыскать прилеж. бокъ данному углу (136).

рад. 90 гр.	10.00000	съ ипотен. и даннымъ угломъ одного вида.
къ тан. ипот. 64° 40'	10.32476	
а кос. дан. ∠ 64 35	9.63266	
къ тан. прил. бока 42 12.	9.95742	

Сыскать другой уголъ (137).

радіусъ 90 гр.	10.00000	съ ипот. и дан. ∠ одного вида.
къ кос. ипот. 64 гр. 40 м.	9.63133	
а тан. дан. ∠ 64 гр. 35 м.	10.32313	
къ кот. искомаго ∠ 48 гр.	9.95446	

179. III, въ треугольникѣ ABC даны бокъ CB = 42 гр. 12 м. противной ∠ CAB, 48 гр. сыскать остальныя части.

начерта-

начертаніе.

1е. Положа бокъ AB на первомъ кругѣ (ф. 74).

Напиши косвенный кругъ ACD (75) дѣлающи съ первымъ кругомъ ∠ CAB = данному углу 48 гр. Изъ центра O перваго круга разстояніемъ дополненія данной стороны 42 гр. 12 м. начерти малой кругъ (76) сѣкущей круга ACD въ C. Проведи прямой кругъ OCB, и будетъ желаемой треугольникъ CAB.

2е. Полагая данной бокъ на первомъ кругѣ (ф. 75).

Проведи прямой кругъ OAB, и другой ему прямостоящей OE. Учиня EC = 42 гр. 12 м. проведи діаметръ CD и другой къ нему перпендикулярной OP. Изъ E полюса дуги AB опиши малой кругъ (77), разстояніемъ даннаго угла 48 гр. сѣкущей круга OP въ P. Около P, яко полюса (64), начерти косвенный кругъ CAD сѣкущій круга AB въ A: по сему CBA есть искомой треугольникъ, коего стороны измѣрются чрезъ N. 68. а углы чрезъ N. 70.

вычисленіе.

Сыскать ипотенузу AC (121).

син. ∠ CAB, 48 гр.	0.1289	AC можетъ быть меньше и больше 90 гр.
къ син. CB, 42 гр. 12 м.	9.82719	
а рад. 90 гр. 00	10.00000	
къ син. AC 64 гр. $40\frac{1}{2}$ м.	9.95612	

сыскать

Сыскать другой бокъ АВ (126).

радїусъ 90 г.	10.00000	АВ бываетъ менѣ и болѣ 90 гр.
къ кот. ∠ САВ, 48 гр.	9.95444	
а тан. СВ 42 гр. 12 м	9.95748	
къ син. АВ 54 44	9.91192	

Сыскать другой уголъ С (128).

кос. СВ, 42 г.	0.13030	∠ С, бываетъ острой и тупой.
къ кос. ∠ САВ 48	9.82551	
а радїусъ 90	10.00000	
къ син. иском. ∠С, 64 35	9.95581	

180. IV. въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ АВС даны, АВ, 54 г. 43 м. и уголъ САВ, 48 гр. сыскать остальныя части.

начертанїе.

1 е. полагая бокъ АВ на начальномъ кругѣ (ф. 76).

Начертя первой и прямой кругъ ОВ, здѣлай ВА = 54 гр. 43 м. и проведи дїаметръ AD. Чрезъ А опиши косвенный кругъ ACD (73) составляющїи съ первымъ кругомъ уголъ ВАС, 48 гр. и сѣкущей ОВ въ С: и тако АСВ есть желаемый треугольникъ.

2 е. положа бокъ ВС на начальномъ кругѣ (ф. 77).

На прямомъ кругѣ ОВ отмѣтя (69) дугу АВ = 54° 43′, чрезъ точку А опиши (74) косвенной кругъ CAD, дѣлающїи съ АВ уголъ ВАС = 48 гр. и сѣкущей перваго круга въ С. По сему АВС есть желаемый треугольникъ

никъ: искомыя его стороны измѣрются чрезъ N. 68, а уголъ ACB чрезъ N. 70.

вычисленіе.

Сыскать уголъ BCA (131).

радїусъ 90 гр.	10.00000	
къ кос. AB, 54 г. 43 м.	9.76164	уголъ C подобны углу
а син. ∠CAB, 48 гр.	9.87107	CAB.
къ кос. ∠ACB, 64 г. 35 м.	9.63271	

Сыскать бокъ BC (129).

радїусъ 90 гр.	10.00000	
къ син. AB, 54 г. 43 м.	9.91185	
а тан ∠ CAB 48 гр.	10.04556	бокъ BC подобны
къ тан. BC, 42 г. 12 м.	9.95741	боку AB.

Сыскать ипотенузу AC (130).

радїусъ 90 гр.	10.00000	
къ кос. ∠CAB 48 гр.	9.82551	ипотенуза AC съ
кот. бока AB 54 г. 43 м.	9.84979	бокомъ AB и съ ∠
кот. ипот. AC 64 г. 40 м.	9.67530	CAB одного виду.

181. V. въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC даны бокъ AB, 54 гр. 43 м. бокъ BC, 42 гр. 12 м. сыскать прочїя части треугольника.

начертаніе.

полагая одинъ бокъ на первомъ кругѣ (ф. 78).

Начертя начальный кругъ, проведи прямой кругъ OB. Положа 54° 43′ отъ B къ A, и 42° 12′ отъ B къ C (72) проведи дїаметръ AD. Чрезъ точки A, C, D начер-

ти (г. 100) косвенный кругъ, и будетъ ABC желаемый треугольникъ, коего углы по сему чертежу измѣряются чрезъ N. 70, а ипотенуза AC чрезъ N. 68.

пычисленїе.

Сыскать уголъ A (112).

рад. 90 гр.	10·00000	
къ син. AB, 54 г. 43 м.	9·91185	уголъ A одного виду съ BC.
а кот. BC, 42 г. 12 м.	10·04251	
къ кот. ∠ A, 48 гр.	9·95436	

Сыскать уголъ C (112).

рад. 90 гр.	10·00000	
къ син. CB 42 г. 12 м.	9·82719	уголъ C подобный боку AB.
а кот. AB, 54 г. 43 м.	9·84979	
къ кот. ∠ C, 64 г. 35 м.	9·67698	

Сыскать ипотенузу AC (111).

рад. 90 гр.	10·00000	
къ кос. AC, 54 г. 42 м.	9·76164	ипотенуза AC, одного виду съ боками AB, BC.
а кос. CB, 42 г. 12 м.	9·86970	
къ кос. AC, 64 г. 40 м.	9·63134	

182. VI. въ сферическомъ треугольникѣ ABC даны, ∠ A, 48 гр. другой ∠ C 64 гр. 35 м. сыскать остальныя части:

начертанїе.

Полагая бокъ CB на первомъ кругѣ (ф. 79).

Назнача первый кругъ и проведя прямой кругъ OB, начерти (82) косвенной большей кругъ CAD сѣкущей перваго и

прямаго круга OB подъ данными углами C, A: стороны треугольника могутъ измѣрится чрезъ N. 68.

вычисленіе.

Сыскать бокъ CB (138).

син. ∠ C,	64 г. 35 м.	0·04421	подобны углу A.
къ рад.	90 г. 00 м.	10·00000	
а кос. ∠ A,	48 г. 00 м.	9·82551	
къ кос. CB,	42 г. 12 м.	9·86972	

Сыскать бокъ AB (139).

син. ∠ A,	60 г. 00 м.	0·12893	бокъ AB подобенъ углу C.
къ рад.	90 г. 00 м.	10·00000	
а кос.	64 г. 35 м.	9·63266	
къ кос. AB,	42 г. 12 м.	9·76159	

Сыскать ипотенузу AC (140).

рад.	90 г. 00 м.	10·00000	ипот. AC, одновидна съ углами A, C.
къ кот. ∠ A,	48 г. 00 м.	9·95444	
а кот. ∠ C,	64 г. 35 м.	9·67687	
къ кос. ипот. AC,	64 г. 40 м.	9.63131	

* *

О начертаніи и числительномъ рѣшеніи косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

183. примѣръ. I. въ треугольникѣ ABC даны, AC = 90 гр. уголъ A = 42 гр. 12 м. уголъ B = 64 гр. 40 м. сыскать остальныя части.

начертаніе.

Положа квадрантальной бокъ на начальномъ кругѣ (ф. 80).

Начертя начальный кругъ и проведя дїаметры AD, EC подъ прямыми углами, напиши косвенный кругъ ABD дѣлающи съ AC уголъ 42 гр. 12 м. (73). Чрезъ C начерти большой кругъ CBE сѣкущїй круга ABD подъ угломъ 64 гр. 40 м. (72); по сему ABC есть желаемый треугольникъ, коего уголъ C измѣрится чрезъ N. 70, а стороны AB, CB чрезъ N. 68.

вычисленїе.

Понеже треугольникъ ABC перемѣнится въ прямоугольной треугольникъ BCF, котораго будучи даны, уголъ B, и бокъ CF = ∠ A = 42 гр. 12 м. найдется ипотенуза BC и проч. сїе самое рѣшится чрезъ пропорцїю въ N. 121 и пр.

184. II. въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC даны уголъ C = 35 гр. бокъ AC = BC = 72 гр. сыскать AB и пр. (ф. 81).

начертанїе.

Изобразя первый кругъ проведи накрестъ дїаметры CD, EF. Чрезъ C къ дугѣ CED припиши (73) дугою CBD уголъ C = 35 гр. Положа AC и CB = 72 гр. (69), проведи AG и чрезъ точки A, B, G начерти (г. 100) дугу ABG, коя съ дугами CED, CBD опредѣлитъ

дѣлитъ заданной треугольникъ ABC, коего бокъ AB и уголъ A = B, найдутся по чертежу чрезъ №. 68 и 70.

вычисленїе.

въ равнобедр. треугольникѣ ABC, опущенной перпендикуляръ CI раздѣлитъ (99) уголъ C и бокъ AB на двѣ равныя части. по сему въ прямоугольномъ треугольникѣ AIC (или IBC) даны ипотенуза AC = 72 гр. уголъ ACI = 17 гр. 30 м. найдется (137) уголъ A = B = 45 гр. 45 м. бокъ AI = IB = 16 гр. 37 м. что удвоя выдетъ 33 гр. 14 м. = AB.

185. III. въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC (ф. 81) даны уголъ ACB = 35 гр. бокъ AB = 33 гр. 14 м. сыскать прочее.

начертанїе.

Приписавъ какъ и выше сего уголъ ACB, раздѣли (73) его пополамъ дугою CID, коей сыскавъ (67) полюсъ P, около онаго разстоянїемъ равнымъ дополненїю половины бока AB, начерти (76) дугу сѣкущую кругъ CBD въ B: по томъ чрезъ точки B, P, проведи (63) кругъ ABG; и такъ опредѣлится данной треугольникъ ABC.

вычисленїе.

въ прямоугольн. треугольникѣ AIC, имѣя AI = 16 гр. 37 м. уголъ ACI = 17 гр. 30 м. найдется ипотенуза AC = 72 гр. (121), и уголъ A = углу B = 84 гр. 26 м. (128).

примѣч.

Примѣч. 1е. Чтобъ полбока AI всегда была меньше дуги EK, размѣряющей половину угла ACB, то есть, уголъ ACI (20).

2е. Ежели въ равнобедренномъ и въ равнобочномъ сферическомъ треугольникѣ ABC; знаемы всѣ углы, а надобно сыскать стороны; тогда приписавъ данный уголъ ACB дугою CBD, потомъ дуги CED, CBD, пересѣки (82) дугою ABG такъ, чтобъ уголъ CAB = былъ углу ABC = данному. Величину же сторонъ можно смѣрить чрезъ N. 68, а вычислить чрезъ N. 139, 140.

186. IV. Сферическаго равностороннаго треугольника даны стороны по 60 гр. сыскать углы.

начертанïе:

Изображая начальный кругъ проведи перпендикулярно дïаметры EF, CD (ф. 81) и положа AC = 60 проведи AG. Около точекъ A и C, яко полюсовъ разстоянïемъ 60 гр. начерти (76) два кружка пересѣченныя въ B. Чрезъ точки A, B и C, B проведенныя (62) круга ABG, CBD учинятъ желаемой треугольникъ AIC, въ которомъ можно смѣрить уголъ AIC чрезъ N. 70.

вычисл-

вычисленїе.

Понеже изъ C опущенный перпендикуляръ CI раздѣляетъ уголъ C и бокъ AB на двѣ части равныя. По сему въ прямоугольномъ треугольникѣ AIC, имѣя AC = 60 гр. AI 30 гр. найдется (125) уголъ IAC = 70 гр. 32 м. и проч.

Примѣч. По заданнымъ сторонамъ всякаго равнобедреннаго треугольника величины его угловъ находятся по чертежу и вычисленїемъ равно какъ въ равностороннемъ треугольникѣ.

187. V. въ косоугольномъ сферическомъ треугольникѣ ABC, знаемы, бокъ AB = 114 гр. 30 м. бокъ BC = 56 гр. 40 м. уголъ BCA = 125 гр. 20 м. сыскать прочїя части.

начертанїе.

Полагая данной бокъ прилежащей извѣстному углу на начальномъ кругѣ (ф. 82).

Начертя начальный кругъ и проведя дїаметръ BD, положи BC = 56 гр. 40 м. (68). Напиши большой кругъ CAE, составляющїй уголъ BCA = данному = 125° 20′ (73). Изъ D разстоянїемъ 65° 30′, то есть, суплементомъ бока AB, начерти кружокъ сѣкущей круга CAE въ A (77); и тако здѣлается треугольникъ AEC, коего части можно измѣрить чрезъ N. 68, 70.

вычислѣ-

вычисленіе.

Сыскать уголЪ A, противолежащей боку, BC (169).

син. бока AB, 114 г. 30 м.	0.04098	уголЪ A можетЪ быть острой и тупой: но начертаніе показуетЪ его острымЪ.
кЪ син. угла C, 56 40	9.92194	
а син. бока CB, 125 20	9.91158	
кЪ син. угла A, 48 31	9.87450	

Сыскать уголЪ B (171).

радіусЪ. 90 гр. 00 м.	10.00000	уголЪ m, тупой; ибо уголЪ C и бокЪ BC, суть разновидный.
кЪ танг. ∠C 125 г. 20 м.	10.14941	
а кос. AB, 56 г. 40 м.	9.73997	
кЪ кот. m, 127 г. 46 м.	9.88938	

кот. бока BC, 56 г. 40 м.	0.18196	сей уголЪ есть острыи; ибо онЪ разнаго вида сЪ AB против. бокомЪ тупому ∠C.
кЪ кот. бока AB, 114 30	9.65870	
а кос. угла m, 127 46	0.78707	
кЪ кос. угла n, 64 54	9.62773	

по сему разность угловЪ m, n 62 гр. 51 м. = ∠ B; ибо данныя стороны суть разнаго вида.

Сыскать третей бокЪ AC (173).

радіусЪ 90 гр. 00 м.	10.00000	дуга M, болѣ 90 г. потому что ∠ C и бокЪ CB суть разновидны.
кЪ кос. ∠C, 125 20	9.76218	
а тан. BC, 56 40	10.18196	
кЪ тан. M, 138 41	9.94414	

кос. BC, 56 г. 40 м.	9.26002	дуга N меньше 90 г. ибо оная сЪ AB разнаго виду.
кЪ кос. AB, 114 30	9.61773	
а кос. M, 138 41	0.87568	
кЪ кос. N, 55 28	9.75343	

понеже

понеже BC и AB разновидны, то M — N = 83 гр. 13 м. = AC.

188. VI. въ косоугольномъ треугольникѣ ABC даны, уголъ BAC = 48 гр. 31 м.
уголъ BCA = 125 20
бокъ AB = 114 30
сыскать прочїя части.

начертанїе.

Полагая данны бокъ AB на первомъ кругѣ (ф. 83).

Начертя начальный или первый кругъ, проведи дїаметръ DA, и у точки A большимъ кругомъ ACD припиши данной уголъ BAC = 48° 31′ (73). Положа дугу AB = 114° 30′ (68), проведи дїаметръ BE. Чрезъ B начерти большой кругъ BCE сѣкущей круга ACD подъ угломъ BCA = 125° 20′ (79). И тако изобразится треугольникъ ABC, коего невѣдомыя части найдутся чрезъ N. 68 и 70.

вычисленїе.

Сыскать бокъ BC (164).

син угла C, 125 г. 20 м.	0.08841		бокъ BC бываетъ сомнительный; но по чертежу оказался меньше 90 гр.
син. бока AB, 114 30	9.87457		
син. угла A, 48 31	9.95902		
син. бока BC, 56 40	9.92200		

сыскать

Сыскать бокЪ AC (166).

радїусЪ	90 гр.	00 м.	10.00000	дуга M больше 90 гр. ибо ∠ A и бокЪ AB разновидныи.
косин. ∠ A,	48	31	9.82112	
танг. бока AB,	114	30	10.34129	
танг. дуги M,	124	32	10.16241	
кот. ∠ A,	48 гр.	31 м.	0.05345	сїя дуга N, можетЪ быть 41 гр. 20 м. и 138 гр. 40 м.
кот. ∠ C,	125	20	9.85059	
син. M,	124	32	9.91582	
син. N,	41	20	9.81986	

но какЪ данныя углы разновидны, то разность между дугами M и N, 83 гр. 12 м. = AC.

Сыскать третей уголЪ ABC (165).

радїусЪ	90 г.	00 м.	10.00000	уголЪ m, есть тупой; ибо ∠ A и AB разновидный,
танг. ∠ A	48	31	10.05319	
косин. AB	114	30	9.61773	
кот. m,	115	07	9.67092	
косин. ∠ A,	48 г.	31 м.	0.17888	уголЪ n, можетЪ быть острой и тупой; но по чертежу острыи.
косин. ∠ C,	125	20	9.76218	
син. ∠ m,	115	07	9.95636	
син. ∠ n,	52	14	9.89792	

понеже данныя углы разновидны, то разность между углами m и n, 62 гр. 53 м. = углу B.

189. VII. вЪ косоугольномЪ сферическомЪ треугольникѣ ABC, даны, бокЪ AB = 114 гр. 30 м. бокЪ BC = 56 гр. 40 м. уголЪ ABC = 62 гр. 52 м. сыскать остальныя части.

начертанїе.

полагая бокЪ BC на начальномЪ кругѣ (ф. 84). Означа первый кругЪ проведи дїаметрЪ

BD,

BD, и чрезъ B большимъ кругомъ BAD припиши уголъ ABC $= 62^{\circ} 42'$ (73). На кругахъ BCD, BAD отмѣть дуги равныя даннымъ сторонамъ, то есть, BC $= 56^{\circ} 40'$ и BA $= 114^{\circ} 30'$ (68). Проведя діаметръ CE, чрезъ точки C, A, E начерти большой кругъ CAE, и будетъ желаемой треугольникъ ABC, коего искомыя части можно смѣрить чрезъ N. 68, 70.

вычисленіе.

Сыскать уголъ C (172).

радіусъ 90 г.	00 м.	10·00000	M больше 90 гр. ибо
косин. ∠B, 62	52	9·65902	AB больше 90 гр. а ∠
танг. AB, 114	30	10·34129	B острый. взявъ раз-
танг. M, 134	59	10·00031	ность между M и BC,
			78 г. 19 м. назови ея N.
син. N, 78 гр.	19 м.	0·00909	
син. M, 134	59	9·94961	∠ C тупый и неподоб-
тан. ∠B, 62	52	10·29034	ный углу B; ибо M
тан. ∠C, 125	21	10·14904	больше нежели BC.

Сыскать уголъ A (172).

радіусъ 90 гр.	00 м.	10·00000	M меньше 90 гр. по-
косин. ∠B 62	52	9·65902	добно какъ BC и уголъ
танг. BC 56	40	10·18196	ABC острый. взявъ раз-
танг. M, 34	44	9·84098	ность между M и AB,
			79 гр. 46 м. назови N.
син. N 79 гр	46 м.	0·00696	
син. M 34	44	9·75569	∠A острый, подобный
танг. ∠B 62	52	10·29034	∠ABC, какъ M есть
танг. ∠A 48	29	10·05299	меньше противъ AB.

сыскать бокъ AC (170).

радїусъ 90 г. 00 м.	10·00000	дуга M подобна дугѣ AB; ибо ∠ABC острый разность между M и BC, 78 г. 19 м. = N.	
косин. ∠ B, 62 52	9·65902		
танг. AB, 114 30	10·34129		
танг. M, 134 59	10·00031		
косин. M, 134 г. 59 м.	0·15304	AC подобна дугѣ N или меньше 90 гр. потому что ∠ABC есть острый.	
косин. N, 78 19	9·30643		
косин. AB, 114 30	9·61773		
косин. AC, 83 11	9·07480		

190. VIII. въ сферическомъ треугольникѣ ABC

даны уголъ BCA, 125 гр. 20 м.
уголъ BAC, 48 31
AC, 83 13
} сыскать остальное.

начертанїе.

Полагая бокъ AC на первомъ кругѣ (ф. 85).

Начертя начальный кругъ проведи дїаметръ AD, и чрезъ A опиши большой кругъ ABD составляющей ∠ BAC = 48° 31′ (73). Положи AC = дан. боку 83° 13′ (68). Проведя дїаметръ CE, чрезъ C начерти кругъ CBE, приписующїи уголъ ACB = 125° 20′ (73), и сѣкущей ABD въ B, и такъ начертится треугольникъ ABC, коего части измѣренїемъ найдутся чрезъ N. 68, 70.

исчислѣ-

Вычисление.

Сыскать бокЪ AB (167).

радїусЪ 90 г. 00 м.	10·00000	∠ m, тупой, подобный ∠ BCA, и AC меньше 90 гр. разн. между ∠ m и ∠ A, 50 гр. 57 м. = n.
косин. AC, 83 13	9·07230	
танг. ∠C, 125 20	10·14041	
котан. m, 99 28,	9·22171	
косин. n, 50 гр. 57 м.	0·20066	AB разнаго виду сЪ ∠ n, по тому что ∠ ACB есть тупой.
косин. m, 99 28.	9·21610	
танг. AC, 83 13	10·02464	
танг. AB, 114 30,	10·34140	

Сыскать бокЪ BC (167).

радїусЪ 90 гр. 00 м.	10·00000	∠ m острый одновидны сЪ ∠ A, ибо AC меньше 90 гр. разн. между m и ∠ C, 42 гр. 57 м. = n.
косин. AC, 83 13	9·07230	
танг. ∠ A, 48 31	10·05345	
кот. ∠ m, 82 23	9·12575	
косин. n, 42 гр. 57 м.	0·13552	BC меньше 90 гр. одновидны сЪ ∠ n; ибо ∠ A есть острый.
косин. m, 82 23	9·12236	
танг. AC, 83 13	10·02464	
танг. BC, 56 41	10·18252	

Найти уголЪ B (165).

радїусЪ 90 гр. 00 м.	10·00000	∠ m, тупой подобной углу C, ибо AC меньше 90 гр. разн. между m и ∠ A 42 гр. 57 м. = n.
косин. AC 83 13	9·07230	
танг. ∠C 125 20	10·14941	
кот. m, 99 28	9·22171	
син. ∠ m 99 гр. 28 м.	0·00595	∠ B неподобны углу C, ибо ∠ m больше угла A.
син. ∠ n 50 57	9·89019	
косин ∠ C 125 20	9·76218	
косин ∠ B 62 53	9·65832	

 ПримѢръ.

Примѣч. выше сего литерами M, N для сокращенія означены основаніи AD, BD: a m, n изъявляютъ угла ACD, BCD прямоугольныхъ треугольниковъ ACD, BCD (ф. 63, 64 и 65).

191. IX. въ сферическомъ треугольникѣ ABC даны бокъ AB = 114 гр. 30 м.
AC = 83 13
BC = 56 40
сыскать величину угловъ.

начертаніе.

Полагая какой либо бокъ какъ AC на начальномъ кругѣ (ф. 86).

Начерти первый кругъ, и отъ нѣкоей точки какъ A положа AC = 83° 13′ (68) проведи діаметры AD, CE. Около C яко полюса разстояніемъ BC = 56° 40′ начерти кружокъ nB (77). Также изъ A разстояніемъ равнымъ боку AB (буде AB есть меньше 90 гр.) напиши другой кружокъ mB сѣкущей перваго въ B: но ежели бокъ какъ AB = 114° 30′ больше есть 90 гр. то изъ D другова полюса, суплементомъ бока AB означь кружокъ какъ mB, сѣкущей перваго nB въ B. Чрезъ точки A, B, D и C, B, E проведенныя круга ABD, CBE, изобразятъ треугольникъ ABC; коего углы по измѣренію найдутся чрезъ N. 70.

Вычислѣ-

вычисленіе.

Сыскать уголъ C (174):

AC=E= 83 гр. 13 м.	Ар. доп. син. E, 83 г. 13 м.	0.03050
CB=F= 56 40	Ар. доп. син F, 56 40	0.07816
AB=G= 114 30	син. ½ суммы 70 31½	9.97441
E−F=D= 26 33	син. ½ разн. 43 58½	9.84158
G+D= 141 03	сум. четыр. логар.	19.89710
G−D= 87 57	полс. даетъ 62 39½	9.94855
70 г. 31½ м. = полсум.	сего двойное 125 г. 19 м. = ∠C	
43 58½ = полразн.		

Найти ∠ A (174).

AB=E= 114 гр. 30 м.	Ар. доп. E= 114 г. 30 м.	0.04098
AC=F= 83 13	ар. доп. F= 83 13	0.00305
BC=G= 56 40	полсум. = 43 58½	9.84158
E−F=D= 31 17	полраз. = 12 41½	9.34184
G+D= 87 57	сум. четыр. логар.	19.22745
G−D= 25 23	полсуммы 24 15½	9.61372
полсум. 43 58½	сего двойное 48 г. 31 м. = ∠A.	
полразн. 12 41½		

Сыскать ∠ B (174).

AB=E= 114 гр. 30 м.	Ар. до. с. E= 114 г. 30 м	0.04098
BC=F= 56 40	ар. до. с. F= 56 40	0.07806
AC=G= 83 13	син. ½ суммы 70 31½	9.97441
E−F=D= 57 50	син. ½ разнос. 12 41½	9.34184
G+D= 141 03	сумма четыр. логар.	19.43529
G−D= 25 23	полс. дастъ 31 28	9.71764
полсум. 70 31½	что удвоен. 62 г. 56 м. = ∠B.	
полразн. 12 41½		

192. X. въ сферическомъ треугольникѣ ABC.

данны { уголъ A = 48 гр. 31 м.; уголъ B = 62 52; уголъ C = 125 20 } сыскать стороны

начертанїе.

Полагая два угла C и B на первомЪ кругѢ (ф. 87).

Начертя начальной кругЪ проведи дїаметры CD, EF одинЪ другому перпендикулярно. Чрезъ C напиши кругЪ CAD, дѢлающей ∠BCA = ∠C, 125 20 (73). Начерти кругЪ BAG сѢкущей круга CFD, CAD подЪ данными углами B = 62 52, и A = 48 31 (82), и тако сочинится треугольникЪ ABC, коего стороны по измѢренїю найдутся чрезЪ N, 68.

вычислѢнїе.

ВычислѢнїе сторонЪ всякаго сферическаго треугольника можно и не перемѢняя (90) его вЪ треугольникЪ FEK дѢлать (174) прямо по заданнымЪ угламЪ, употребя токмо суплементЪ угла противолежащаго искомому боку, и сїе правило сЪ предписаннымЪ (175) во всемЪ сходствуетЪ.

Сыскать бокЪ AB (175).

∠B = E =	62 гр.	52 м.	Ар. доп. с. E,	62 г.	52 м.	0 05064
∠A = F =	48	31	ар. доп. с F,	48	31	0.12543
доп. ∠C = G	54	40	син. ½ суммы	34	30 ½	9.75322
E — F = D	14	21	син. ½ разн.	20	09 ½	9.53733
G + D =	69	01	сумма четыр. логар.			9.46662
G — D =	40	19	полс. оныхЪ	32	45 ½	9.73331
34 г.	30 ½ м.	полсум.	чего удвоенное дополненїе			
20	09 ½	полразн.	есть 114 гр. 29 м. = AB.			

Сыскать

Сыскать бокъ AC (175).

∠C = E =	125° 20'	ар. доп. син. E = 125° 20		0.08842
∠A = F =	48 31	ар. доп. син. F = 48 31		0.12543
супл. ∠B, = G,	117 08	син. полсум. 96 58½		9.99677
E — F = D,	76 49	син полразн. 20 09½		9.53733
G + D =	193 57	сумма четыр. логар.		19.74795
G — D =	40 10	противъ полс. 48° 25' ½		9.87397
полсумма =	96 58½	супл. удвоен. числа 83° 09' = CA		
полразность =	20 09½			

Сыскать бокъ BC (175).

∠C = E =	125° 20'	ар. доп. син. E, 125° 20'	0.08842
∠B = F =	62 52	ар. доп. син. F, 62 52	0.05064
суп. ∠A = G =	131 29	син. полсуммы 96 58½	9.99677
E — F = D =	62 28	син. полразн. 34 30½	9.75322
G + D =	193 57	сумма четыр. лог.	19.88905
G — D =	69 01	противъ полс. 61° 39'	9.94452
полсумма =	96 58½	супл. удвоеннаго числа есть	
полрозность =	34 30½	56° 42' = BC.	

заключенïе.

Помощïю сея сферическïя тригонометрïи всякïя Астрономическïя и Географическïя задачи рѣшить можно, и всѣ въ вышепомянутой бугеровой навигацïи (стр. 63) сферическïя пропорцïи объясняются. въ ней кн. IV, гл. V. Арт. V, истинну показаннаго правила, какъ по заданнымъ сторонамъ сферическаго треугольника находить величину его угловъ, изъясняетъ предложенïе N. 174. Ибо по силѣ того правила въ примѣрѣ N. 101 слѣдуетъ изъ полсуммы трехъ сторонъ 127 гр. 11½ м. вычесть порознь стороны содержащïя искомый уголъ, и будетъ первая

вая разность 70 гр. $31\frac{1}{2}$ м, вторая 43 гр. $58\frac{1}{2}$ м. изЪ коихЪ чиселЪ хотя по отмѣнному здѣсь токмо сЪ тамошнимЪ согласному выводу одно полсуммою а другое полразностью названы, а вЪ прочемЪ есть тоже дѣйствіе: тамЪ же показано какимЪ средствомЪ таковыя правила и проч. по Гантирскому шкалу рѣшить. что же не положено здѣсь кромѣ обыкновеннаго начертанія сферическихЪ треугольниковЪ инаго разновиднаго, какЪ чинимаго при центрѣ начальнаго круга или при какой нибудь данной точки на кругѣ проекціи, то почелЪ я за ненужное дѣло, по тому что читатель выуча истолкованныя здѣсь общія правила сего начертанія, разными оное образы производить безсомненія самЪ узнаетЪ.



ПРИБАВ-



ПРИБАВЛЕНІЕ.

О измѣреніи площади на поверхности сферы дугами какихъ нибудь круговъ, опредѣленной.

193. Предл. I. одною плоскостью отрезанная часть сферической поверхности или между двухъ паралельныхъ круговъ содержимая на сферѣ площадь къ цѣлой площади сферы, какъ высота или толщина тоя части ко всей оси тоя сферы.

Пусть ADaE (ф. 88) представляетъ сферу пересѣченную плоскостью BE паралельно къ плоскости DF; говорю, что площадь BAE къ площади сферы какъ AG: Aa, и площадь пояса (зона) BDFE къ площади сферы, какъ GC къ Aa.

Доказ. Ибо положа окружность ADaE = P, будетъ (г. 409 и 274.) площадь части ABE = AG×P, а площадь шара равна Aa×P (г. 409). По сему площ. ABE къ площ. шара какъ AG×P : Aa×P, или (раздѣля послѣднее содержаніе на P) какъ AG : Aa (г. 191). Такъ же докажется что площадь зона BDFE, къ площади шара какъ GC : Aa.

194. II. площадь двусторонника ADadA къ площ. шара, какъ часть ея ABb къ площ. отрезка ABE, и какъ четыреугольникъ BbdD къ части зона BEFD, и проч.

Доказ. Понеже какъ Bb либо Dd къ цѣлой окружности BE либо DE, такъ ∠ BAb либо DAd къ 360 гр. или какъ Bb либо Dd къ полуокружности BE либо DF, такъ ∠ BAb либо DAd къ 180 гр. По сему какъ площадь ABabA къ площади полусферы, часть ABbA къ площади полуотреска ABE, часть aBb къ полуотрезку aBE, и площадь BbdD къ полупояса BEDF и проч. такъ уголъ DAd къ 180 гр.

195. III. площадь сферическаго треугольника (дугами большихъ круговъ опредѣленная) къ площади большаго круга, какъ разность между суммы всехъ угловъ онаго треугольника и 180 гр. къ 180 г. или равна произведенїю радїуса умноженнаго дугою большаго круга содержащею ту разность градусовъ.

Доказ. Представь себѣ что сферическаго треугольника ABD изображеннаго на сферѣ FhFh (ф. 89) продолженныя стороны совершены въ цѣлыя круга; тогда (19) уголъ A = a, a = a и проч. и двусторонникъ aa = AA, bb = BB, dd = DD: притомъ противолежащїя треугольники ABD, abd также равныя, ибо ихъ сходственныя стороны и углы между собою равныя.

Слѣдственно. Ежели изъ площади полушара FhFh = RP (то есть, произведенїе радїуса окружностью) вычесть треугольникъ

угольникъ ABD, то остатокъ (RP — ABD) составляетъ три треугольника, аимянно: треугольникъ afH (= aa — abd = AA — ABD), треугольникъ Bef (= BB — ABD) и DEH (= DD — ABD) то есть, AA + BB + DD — 3 ABD = RP — ABD, или перемѣня члены сея равности выдетъ AA + BB + DD — RP = 2 ABD. Положа RP за общей послѣдующей членъ будетъ AA + BB = DD — RP къ RP, такъ 2 ABD къ RP. Но AA + BB + DD — RP къ RP, какъ разность между суммы угловъ A + B + D и 180 гр. къ 180 гр. или какъ разность между суммы дугъ размѣряющихъ тѣ углы и полуокружности къ полуокружности, такъ два треугольника ABD къ RP площади полусферы (или двухъ большихъ круговъ) либо какъ площадь треугольника ABD къ площади большаго круга сферы, такъ A + B + D — 180 гр. къ 180 гр.

Положа S = дугѣ содержащей сумму дугъ измѣряющихъ углы A, B, D и обратя послѣднюю пропорцїю будетъ площадь $\frac{1}{2}$ RP къ треугольнику ABD :: S — $\frac{1}{2}$ P : $\frac{1}{2}$ P (умножа послѣднѣе на R) или :: SR — $\frac{1}{2}$ PR : $\frac{1}{2}$ PR. Изъ сего явствуетъ что площадь сферическаго треугольника ABD равна произве-

денїю радїуса R умноженнаго дугою S — $\frac{1}{2}$ P, коя измѣряетъ уголъ разности между суммы угловъ A, B, D и 180 градусовъ.

196. слѣдст. I. Ежели потребно вычислить по заданнымъ въ градусахъ всѣмъ сторонамъ площадь въ какомъ либо сферическомъ треугольникѣ изображенномъ на шару, коего радїусъ извѣстной величины, то надлежитъ сперва сыскать (191) онаго углы, потомъ найти величину дуги большаго круга того шара соотвѣтствующей разности градусовъ между суммы сихъ угловъ и 180 гр. и умножить ея радїусомъ шара, произведенїе равно будетъ площади онаго треугольника.

197. II. въ треугольникѣ ABD (ф. 90) коего стороны AnD, DB суть дуги малыхъ круговъ EDA, GBH, а бокъ AB есть дуга большаго круга, площадь вычисляется тако: сыскавъ тѣхъ малыхъ круговъ полюсы A, P проведи большїя круга ADC, PDS. вычисля площадь (г. 412) всего отрѣска PEDA и части PDnA, и (196) площадь сферическаго треугольника PDmA, кою вычти изъ части PDnA останется площадь двулинѣйника DA. по томъ сыскавъ также площадь части отрѣска AmDB, вычти изъ нея площадь двусторонника DA остатокъ есть желаемая площадь даннаго треугольника AnDB. Подобнымъ сему способомъ вычисляются площади и такихъ тресторонниковъ, кои только дугами меньшихъ круговъ шара ограничены.



ПРИ-

ПРИПОЛНЕНІЕ.

вЪ геометріи послѢ No. 228 надобно быть сему предложенію.

Всякаго параллелограмма какЪ BCEF (ф. 24) сумма квадратовЪ всѢхЪ его четырехЪ сторонЪ равна есть суммѢ квадратовЪ діогоналей BE, CF.

Доказ. Опустя перпендикуляры Ed Cb будетЪ Bb = Fd. ПотомЪ вЪ △ FCB, FC□ = BC□ + BF□ − 2 BF × Bb (г. 227); и вЪ △ BEF, BE□ = BF□ + EF□ + 2 BF × Fd (г. 228). Сложа сіи разности вмѢстѢ, выдетЪ (по уничтоженіи двухЪ равныхЪ произведеніи имѢющихЪ разныя знаки) FC□ + BE□ = 2 BC□ + 2 BF□ ч. н. д.

вЪ сферической тригонометріи послѢ No. 187 и 192.

ПримѢч. Ежели по заданію вЪ No. 187 потребно начертить треугольникЪ ABC, полагая сперва данной бокЪ AB (ф. 82) на какомЪ-либо косвенномЪ большемЪ кругѢ; то сіе дѢлается по правиламЪ проекціи подобно начертанію показанному вЪ No. 61 плоской тригонометріи.

Задача. вЪ сферическомЪ треугольникѢ какЪ ABC (ф. 86) коего даны всѢ три стороны, опредѢлить точку о коя бы была вЪ равномЪ разстояніи отЪ точекЪ A, B, C и сыскать оное разстояніе.

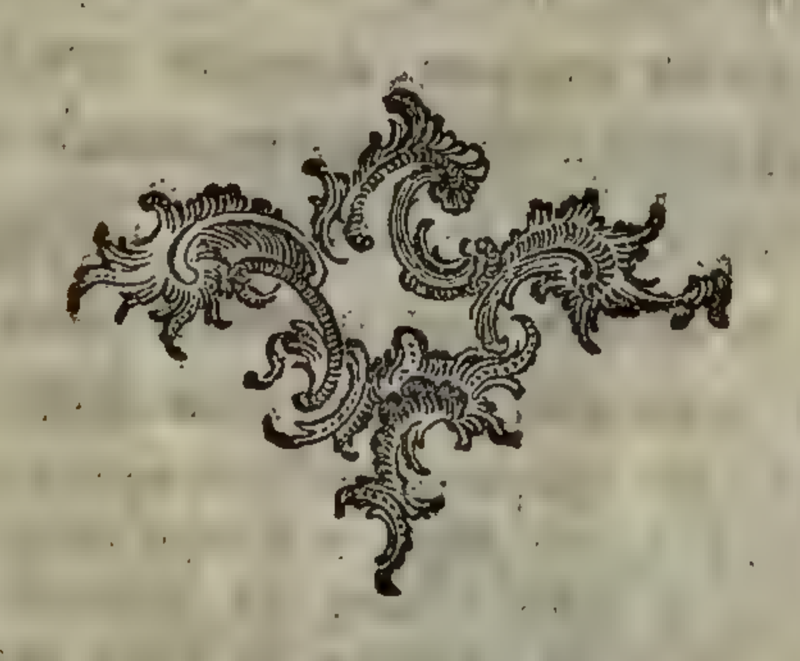
Начертаніе. ИзЪ средины f дуги AC проведи прямой кругЪ fe, а изЪ средины d

бока

бока AB воставь перпендикуляръ до сѣку-
щей перваго въ искомой точкѣ o. Сïе
явно есть отъ N. 96, сферики.

Вычисленïе дуги Ao. Въ прямоуг.
сферическомъ треугольникѣ Afe даны ∠ A,
бокъ Af найдется ∠ e, бокъ Ae. Вычтя
Ad изъ Ae останется ed, потомъ въ
прямоуг. треугольникѣ edo, даны бокъ ed,
и ∠ e сыщется бокъ do. На конецъ въ
прямоугольн. треугольникѣ Ado чрезъ дан-
ныя стороны Ad, do найдется ипотенуза
Ao, желаемое разстоянïе.

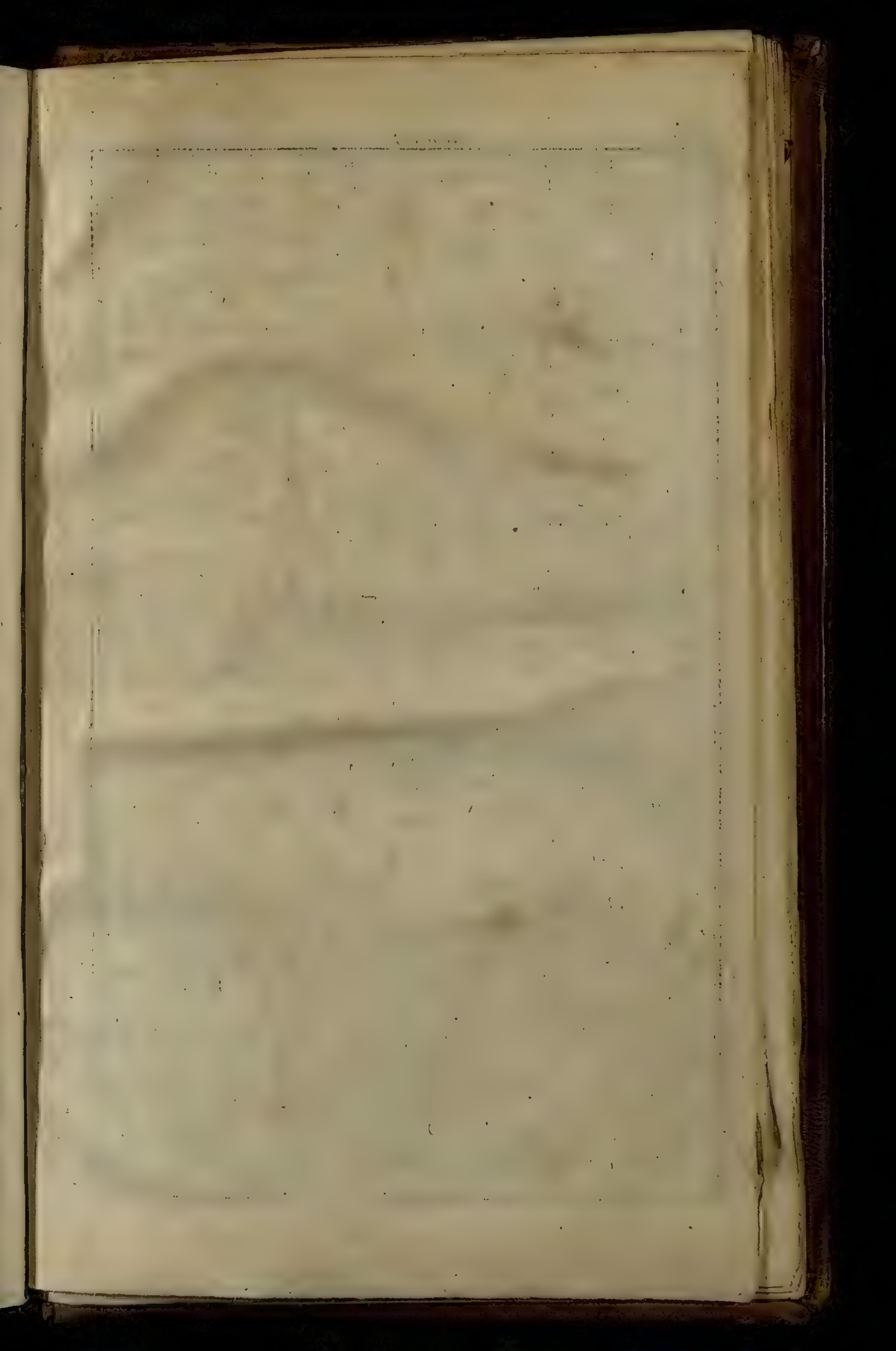
КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ КНИГИ.

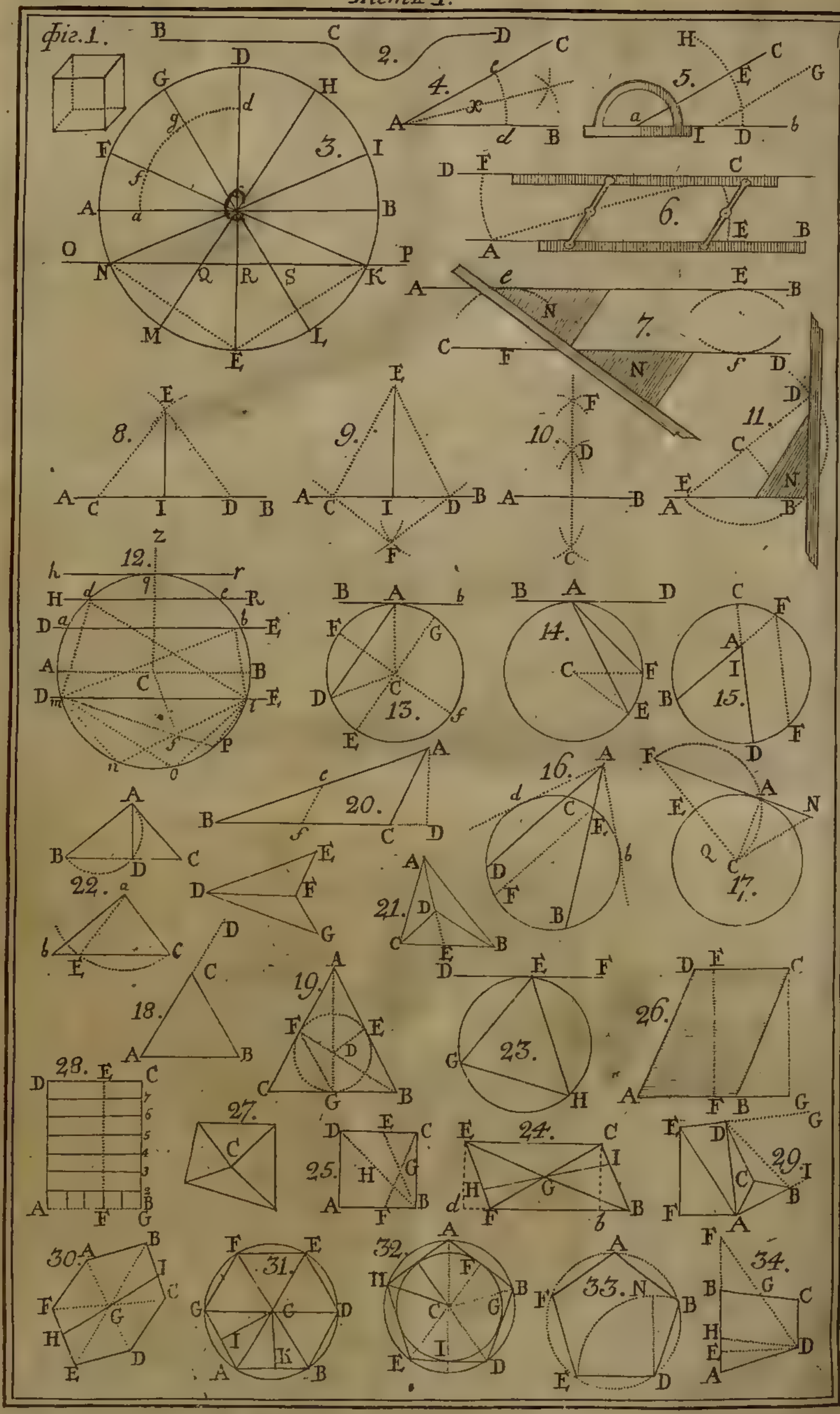


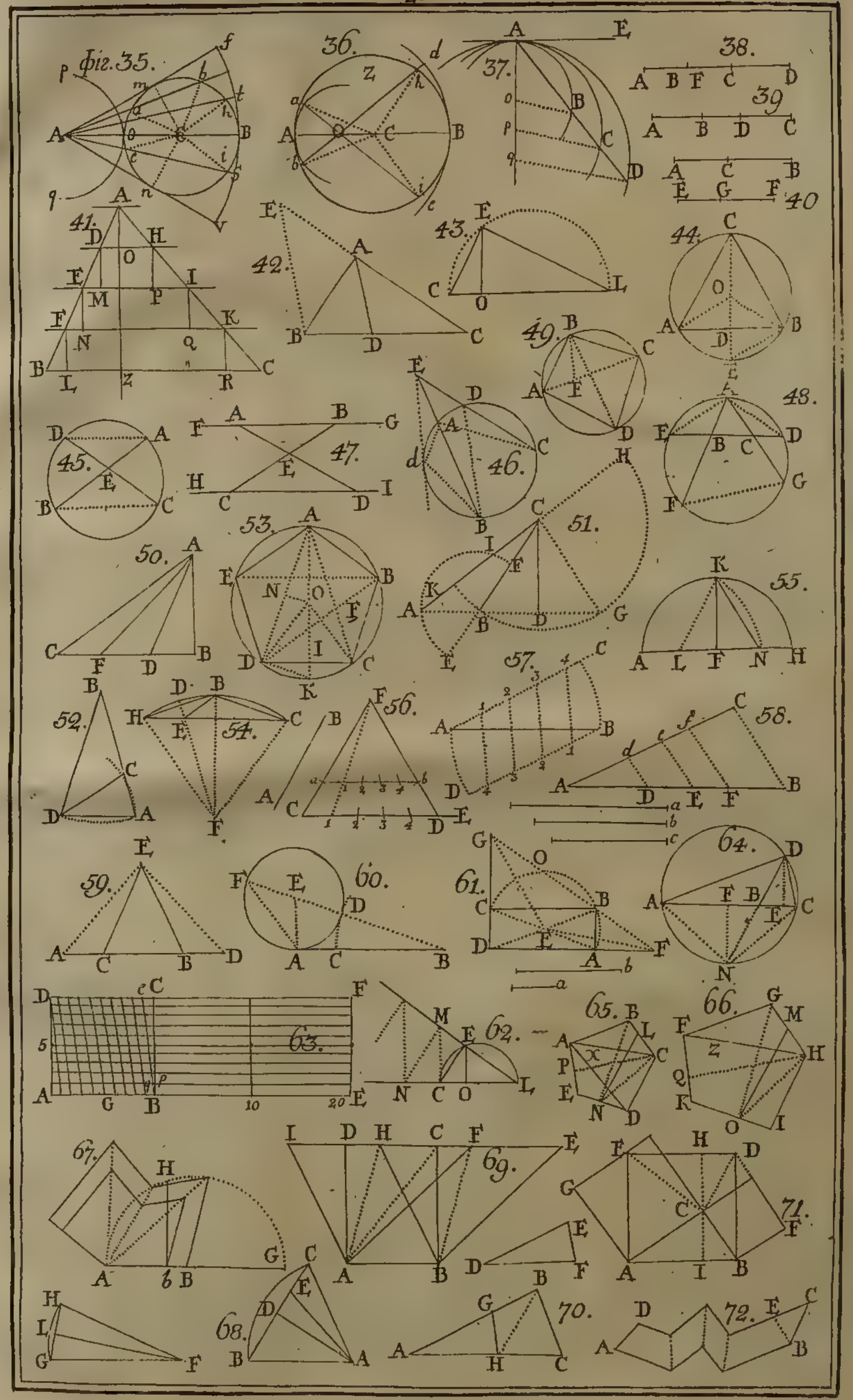
При

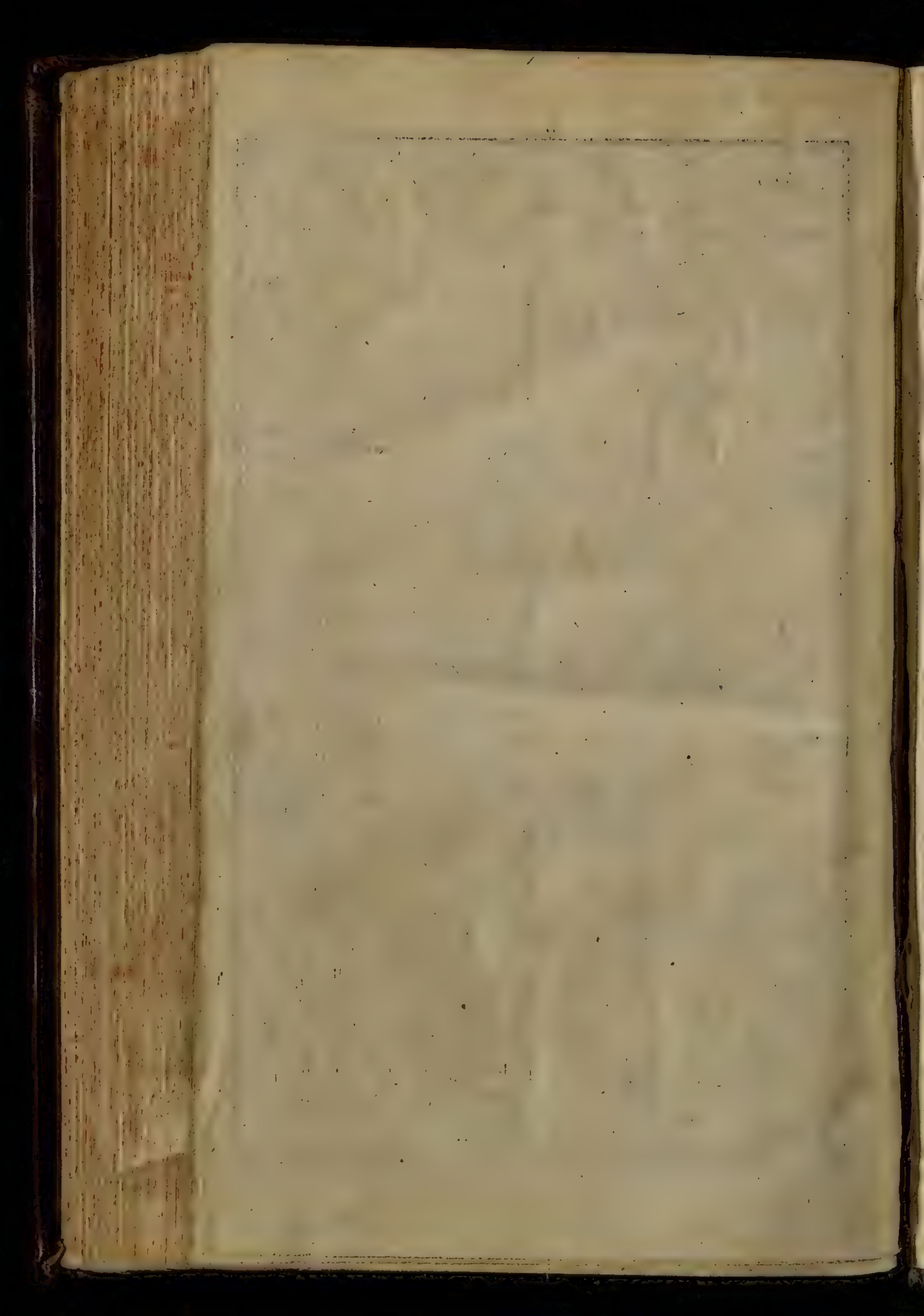
При печатаніи сея книги случившіяся погрѣшности можно поправить слѣдующимъ образомъ.

		напечатано	читайте
стран. 1	стр. 11	толстота	толщина
30	- - 17	содержимая	содержимой
32	- - 21	dAD	bAD
32	- - 23	$=\frac{1}{2}$bc	—bc
118	- - 16	суммы	полсуммы
120	- - 19	ф. 75.	ф. 74
134	- - 6	землемѣріе	земледѣленіе
154	послѣд.	Архимедъ	Пифагоръ
158	- - 33	ф. 121	ф. 122
159	- - 31	122	123
160	- 25	122	124
	- 33	123	125
	- 34	CD	CE
196	- - 9	qb	qp
330	- - 2	DBC	DBA.

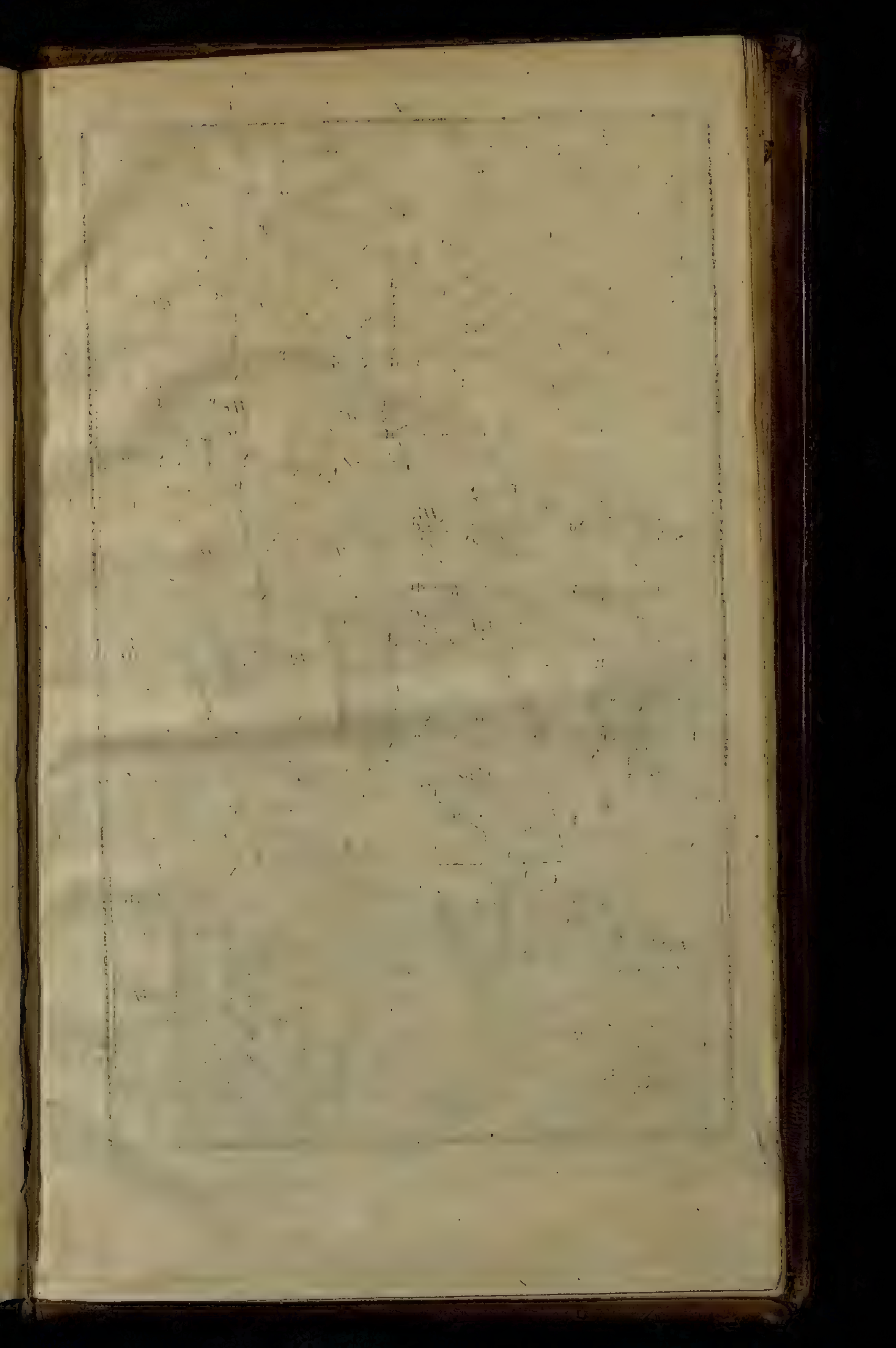


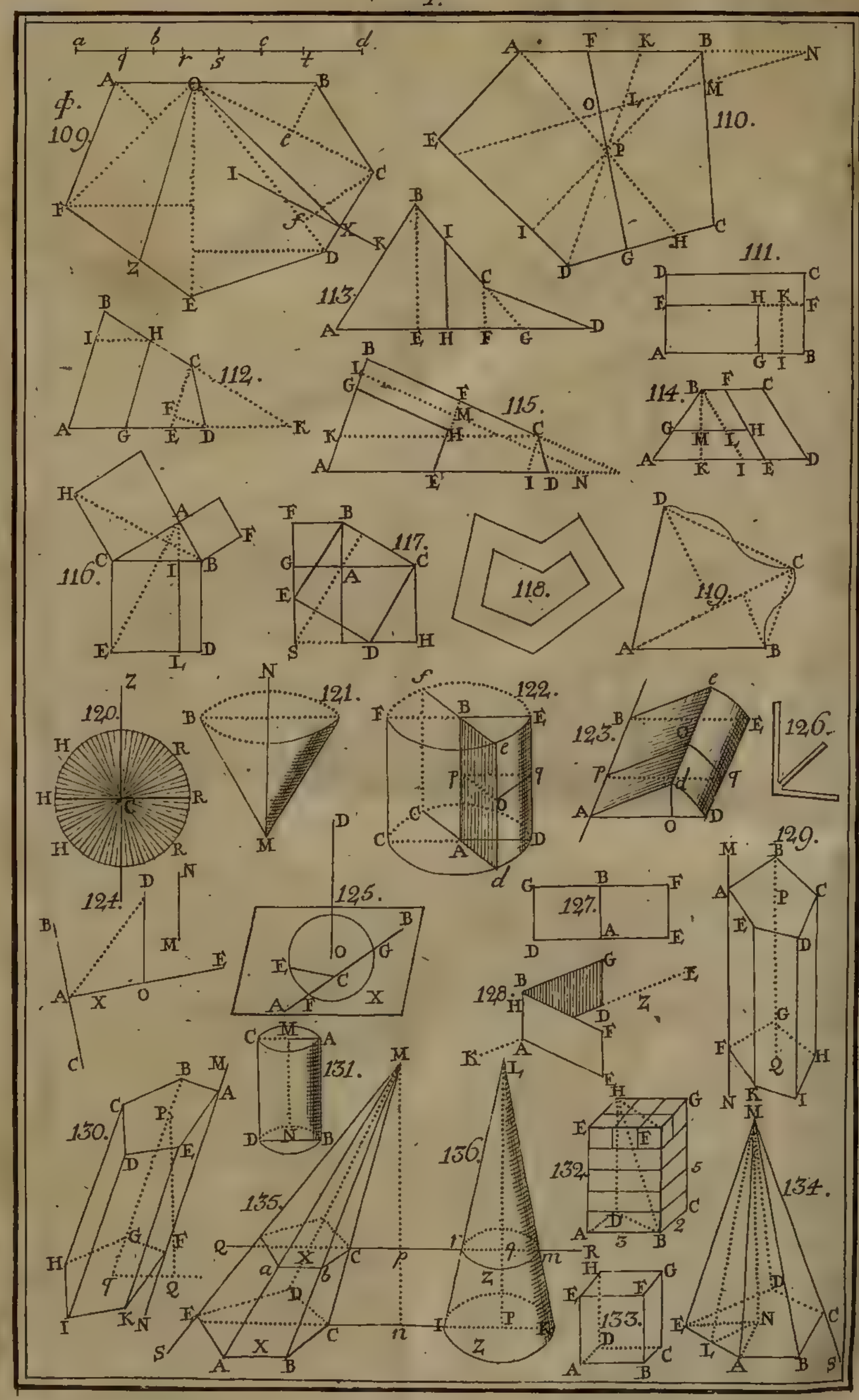

Фіг. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.

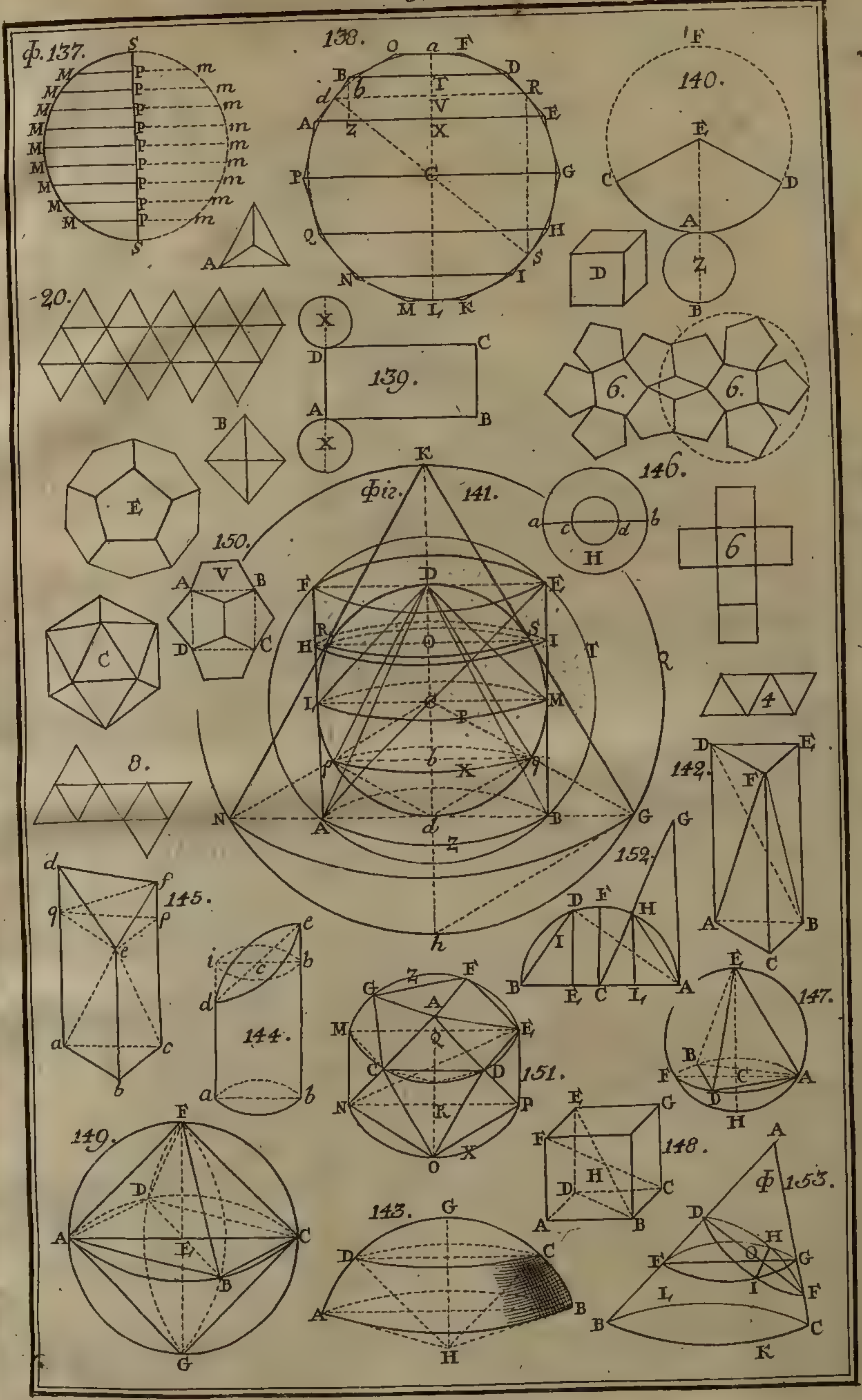

Фиг. 35.
36.
37.
38.
39
40
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
A B F C D
A B D C
A C B
E G F
A B C D E F G H I K L M N O P Q R
10
20

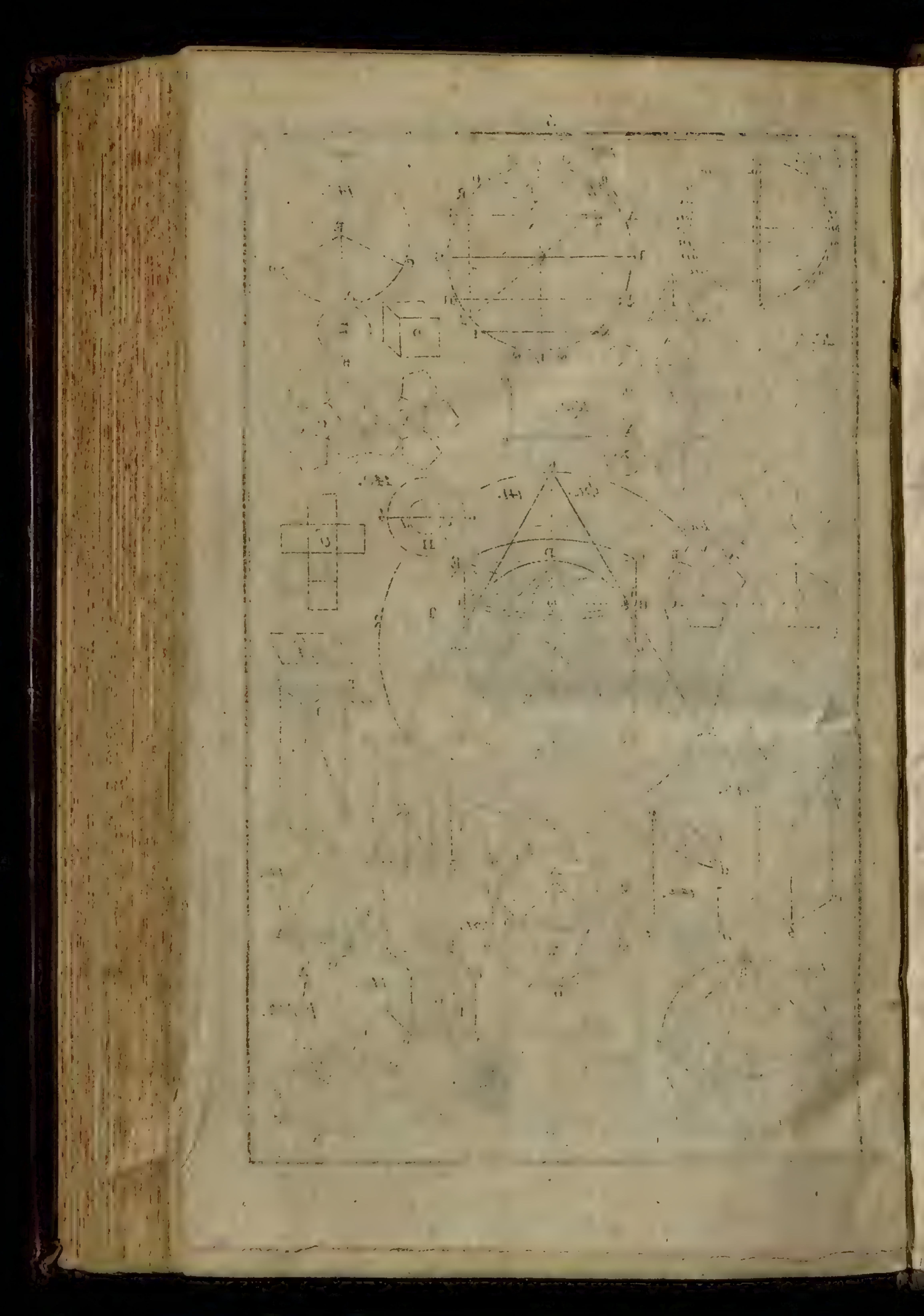


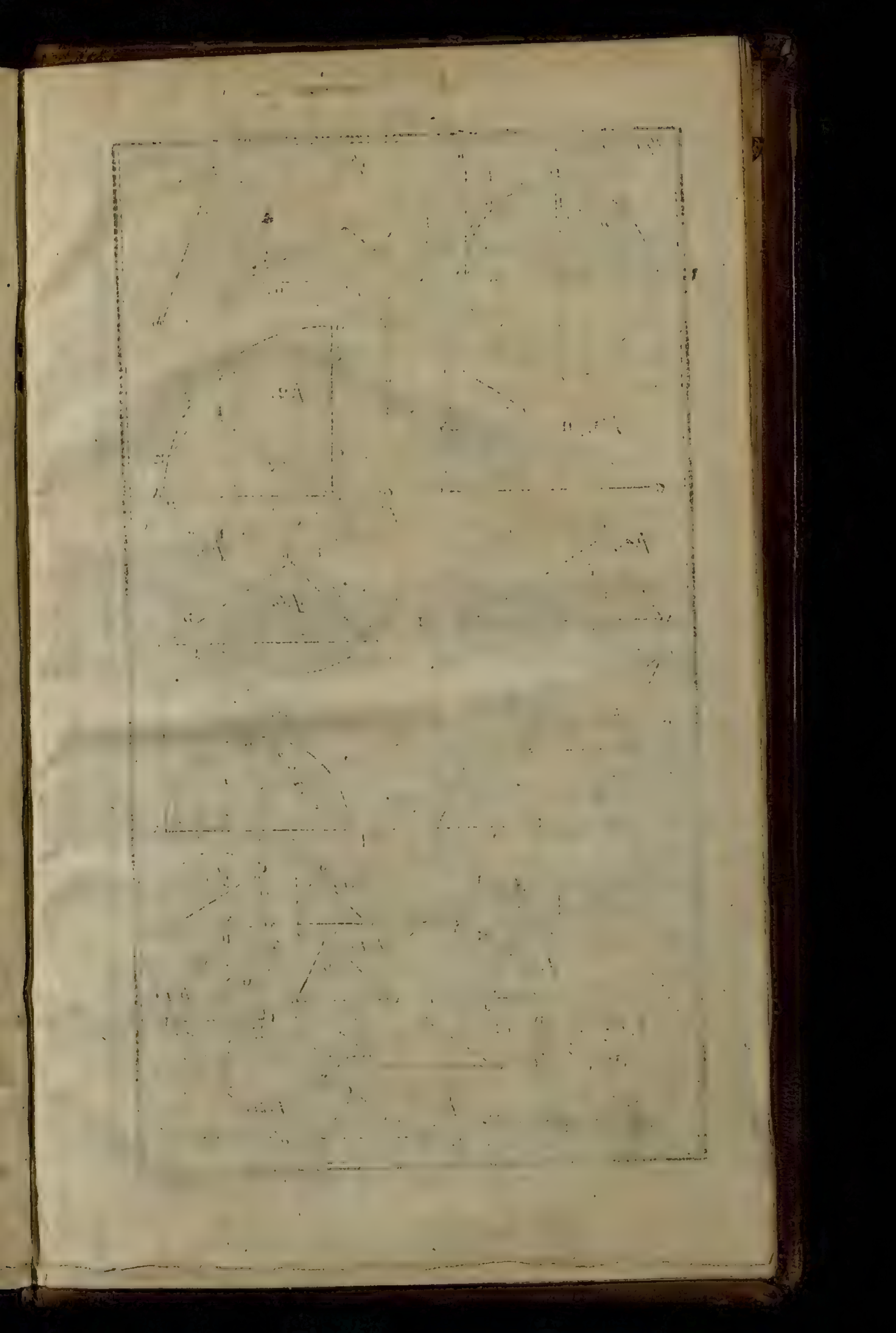
f. 73. 75. 74. 76. 78. 77. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 89. 88. 87. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108.



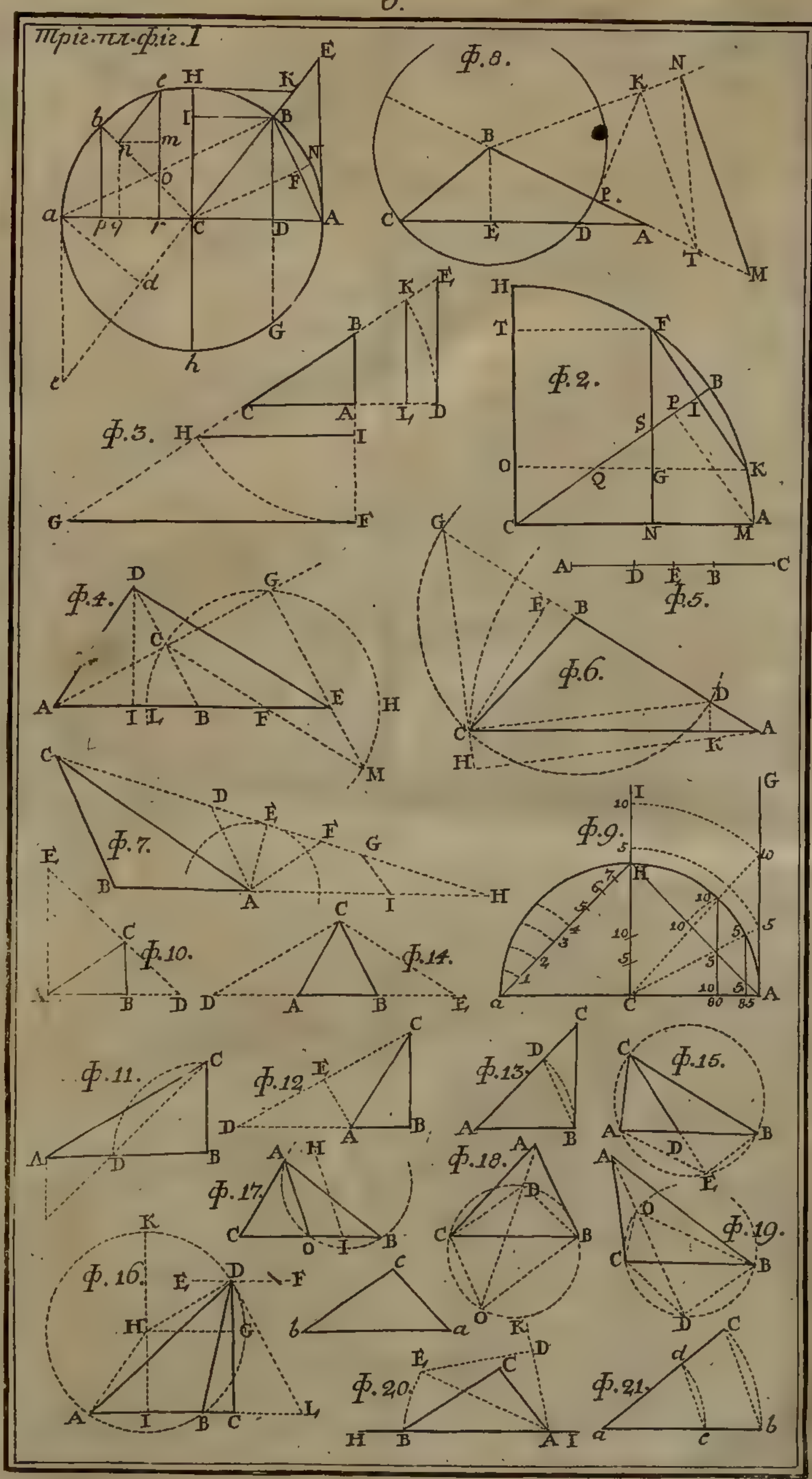

109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.


ф. 137.
138.
139.
140.
фіг. 141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
ф 153.
20.
8.
4
6.
6.
6

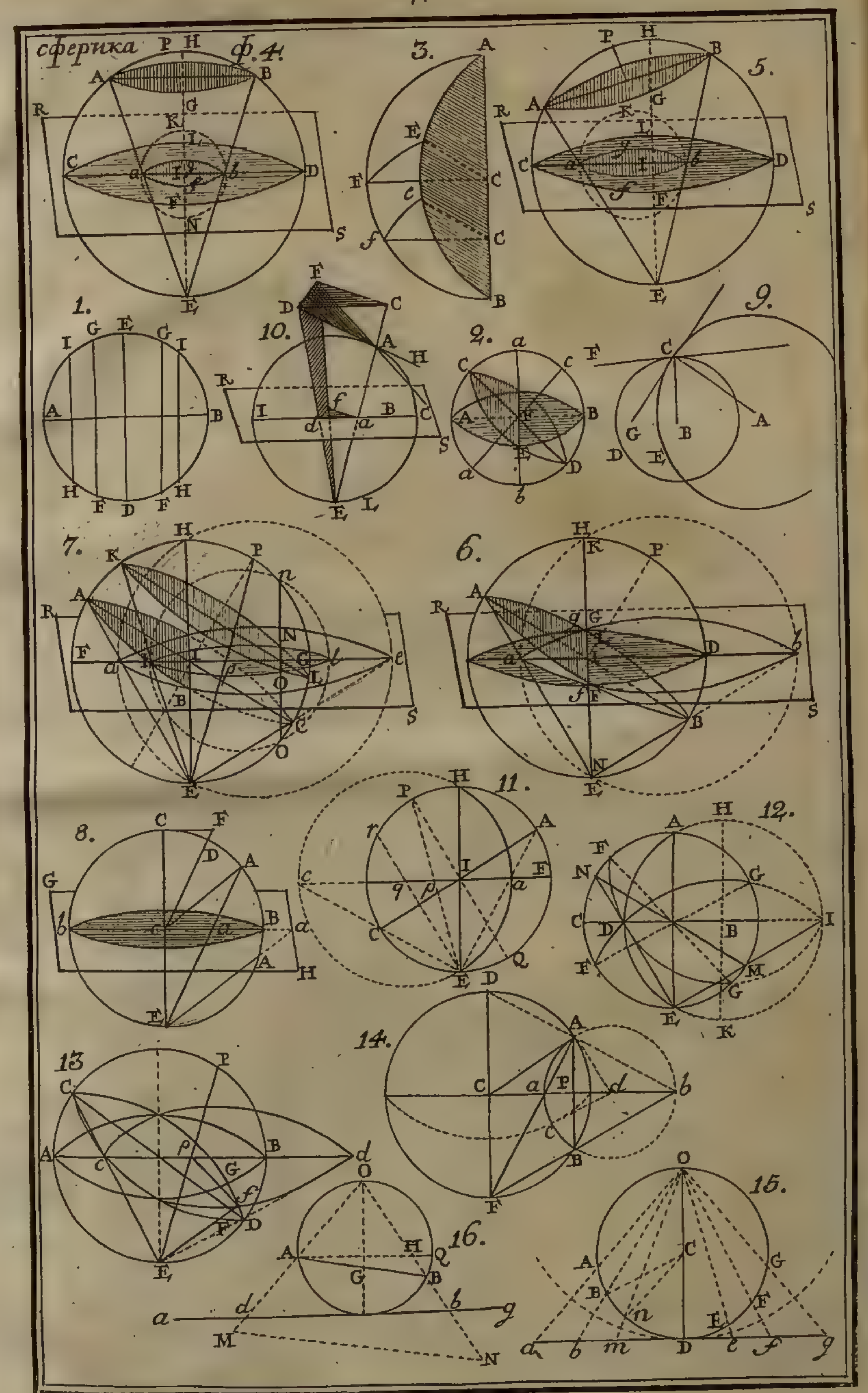


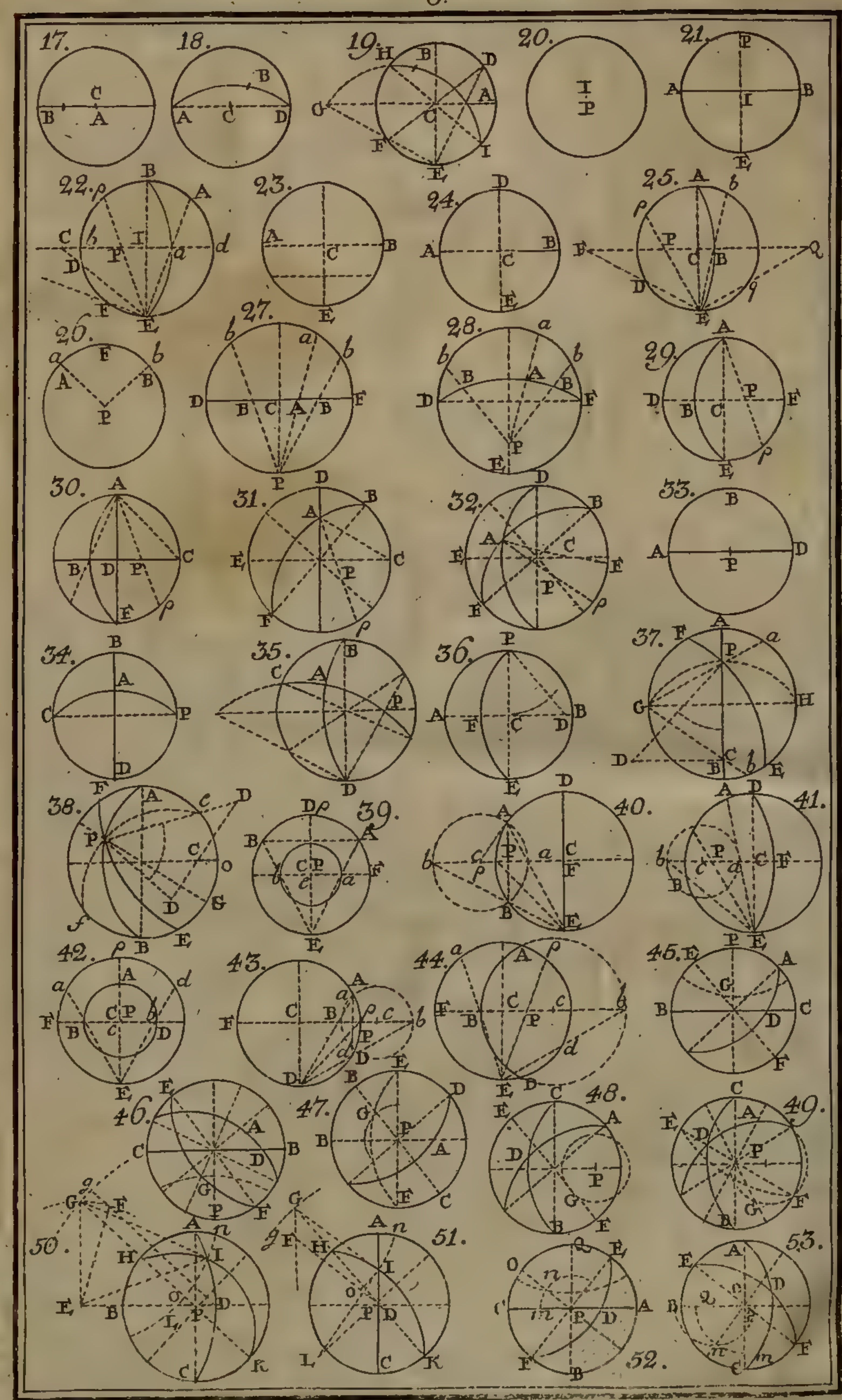


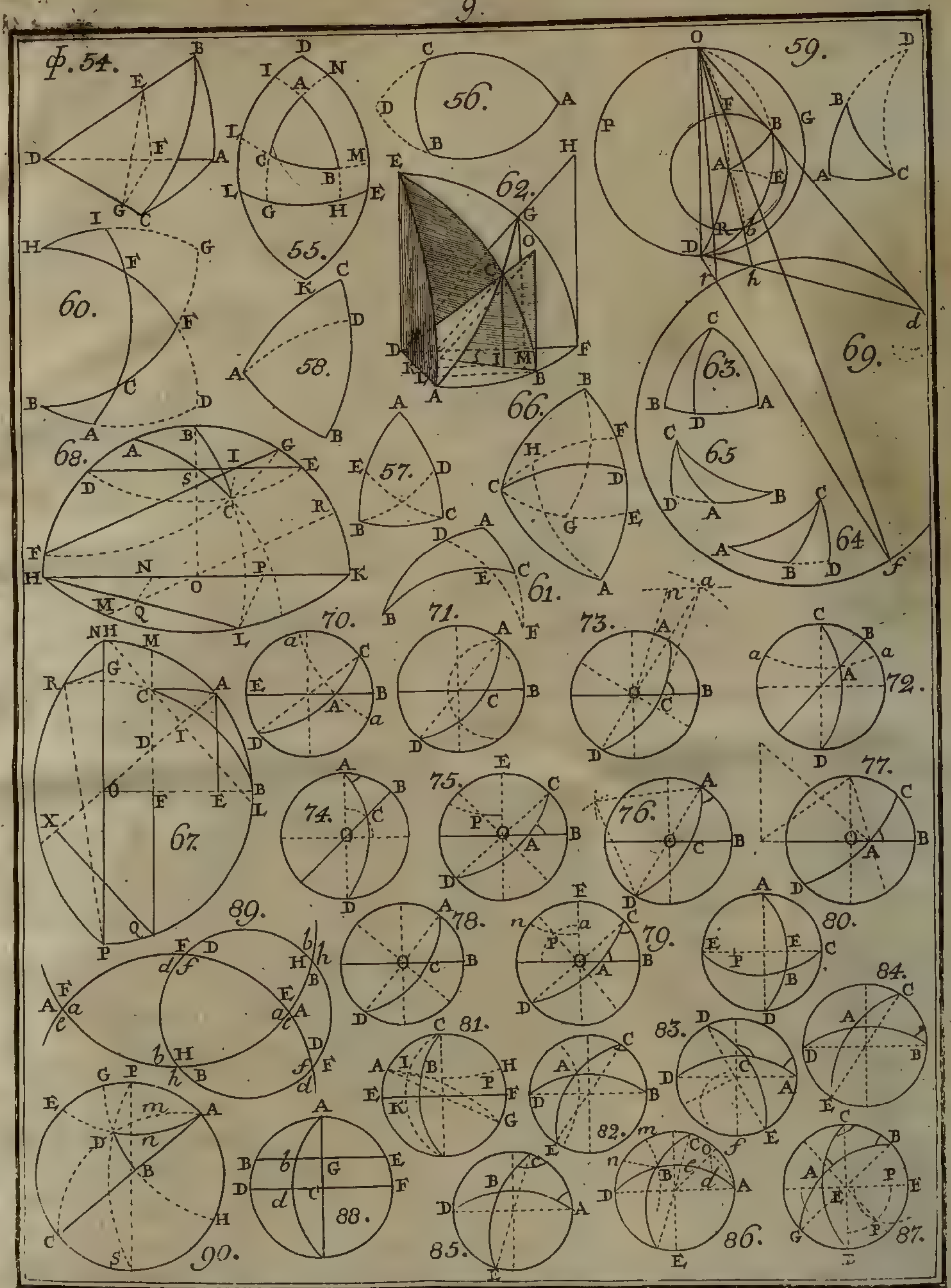
6.



Тріг.пл.фіг.I
ф.2.
ф.3.
ф.4.
ф.5.
ф.6.
ф.7.
ф.8.
ф.9.
ф.10.
ф.11.
ф.12.
ф.13.
ф.14.
ф.15.
ф.16.
ф.17.
ф.18.
ф.19.
ф.20.
ф.21.


сферика
ф. 4.
3.
5.
1.
10.
2.
9.
7.
6.
11.
8.
12.
14.
13
16.
15.


17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.



выр: Петръ Антипьевъ

